

Señales aleatorias en variable discreta

Variable aleatoria

Variable aleatoria

- Es el resultado de convertir cualquier posible suceso de un experimento en un número. Tenemos definidos ε , Ω y una probabilidad P .
- Asigno mediante una función un número real a cada posible resultado del experimento:

$$\omega \in \Omega \rightarrow X(\omega) \in \mathbb{R}$$

- Ejemplo: Colores de una ruleta: rojo y negro

$$X(\text{rojo})=0 \qquad P(\text{rojo})=P(0)$$

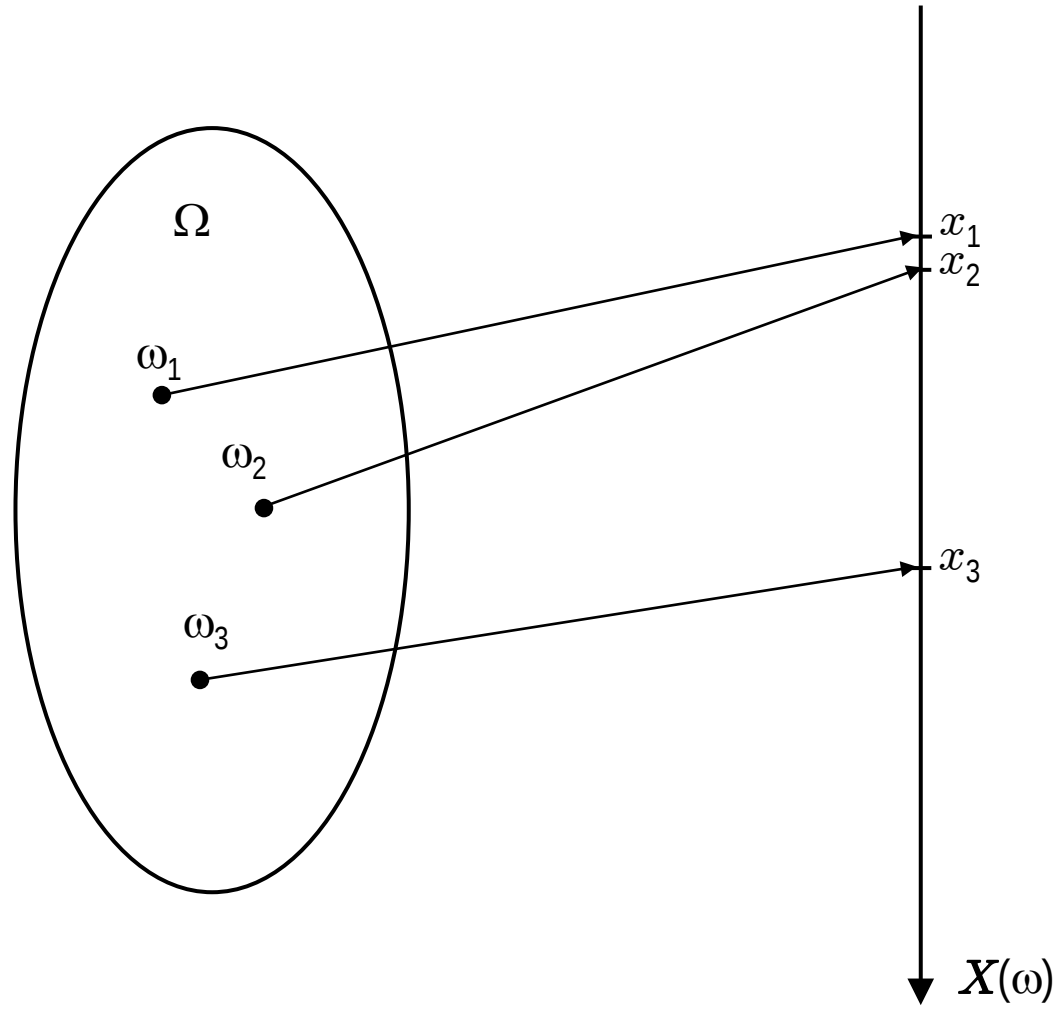
$$X(\text{negro})=1 \qquad P(\text{negro})=P(1)$$

- Ejemplo: Dado

Se asigna el valor numérico de cada cara (1 a 6)

- Por medio de variables aleatorias convertimos cualquier fenómeno estadístico en numérico independientemente de su naturaleza

Variable aleatoria



Variable aleatoria

- Cuando el espacio muestral consiste en un conjunto discreto de eventos ω_i estamos trabajando con variables aleatorias discretas
- Cuando existe un conjunto continuo de valores posibles, trabajamos con variables aleatorias continuas
 - Ejemplos:
 - El resultado de una ruleta es una variable aleatoria discreta
 - El valor de la temperatura en un punto geográfico es una variable aleatoria continua
- Al trabajar con variables continuas no es posible definir la probabilidad de un valor concreto:
$$A = \text{temperatura } 18^{\circ}\text{C} \Rightarrow P(A) = 1/\infty = 0 !!!$$
- En este caso se trabaja con la probabilidad de un intervalo de posibles valores

Variable aleatoria

Función de distribución

- Es un medio para caracterizar un experimento

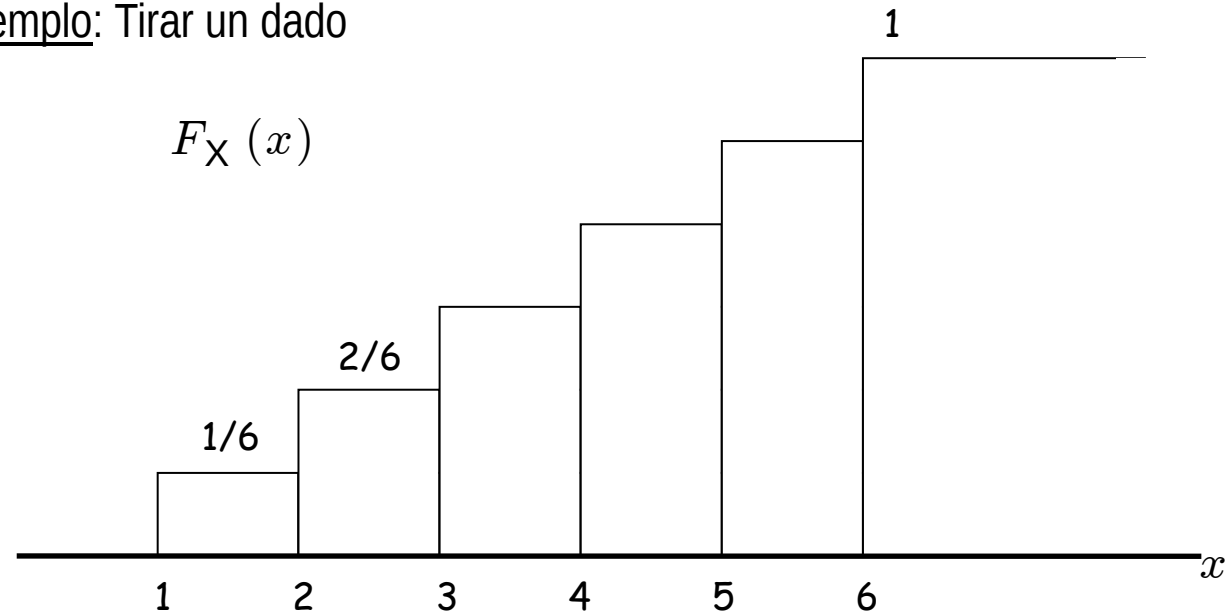
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

donde X es una variable aleatoria y x es una realización de X

- Perfectamente definible tanto para variables continuas como discretas
- Se cumple que

$$F_X(-\infty) = 0, F_X(\infty) = 1, F_X(x) \text{ no decreciente}$$

- Ejemplo: Tirar un dado



- Ejemplo: valor de una resistencia conocidos su valor nominal y su tolerancia

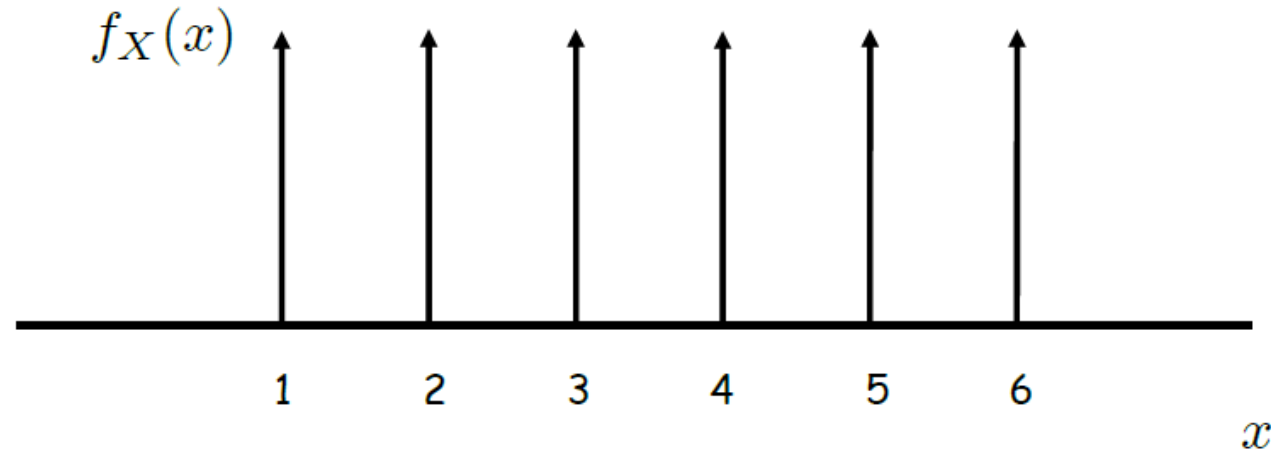
Variable aleatoria
Función de
densidad de
probabilidad

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- Se cumple que

$$f_X(x) \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1 \quad \int_{-\infty}^x f_X(x) dx = F_X(x)$$

- La integral de la función de densidad de probabilidad (fdp) en un intervalo da su probabilidad
- Ejemplo: Tirar un dado



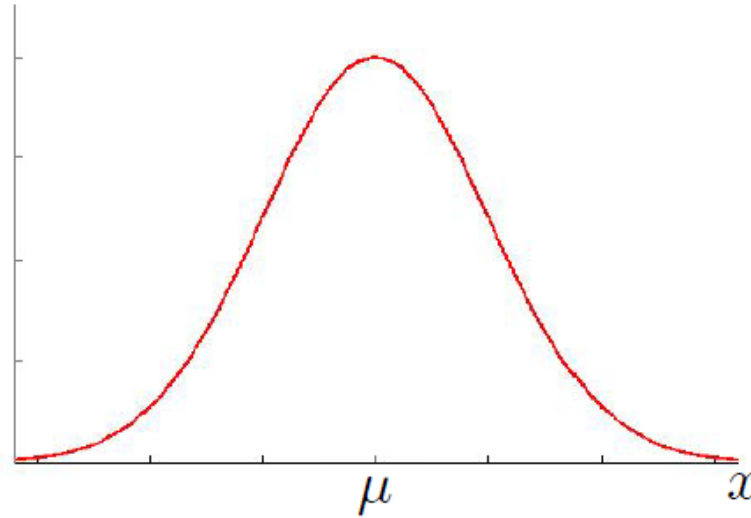
- Ejemplo: Valor de una resistencia conocidos su valor nominal y su tolerancia

Variable aleatoria
Función de
densidad de
probabilidad

- Función densidad de probabilidad gaussiana

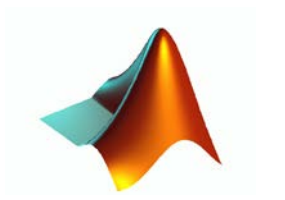
Una variable aleatoria es gaussiana si su fdp es de la forma

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



La distribución gaussiana es la más común en la naturaleza

El ruido en comunicaciones se modela como gaussiano

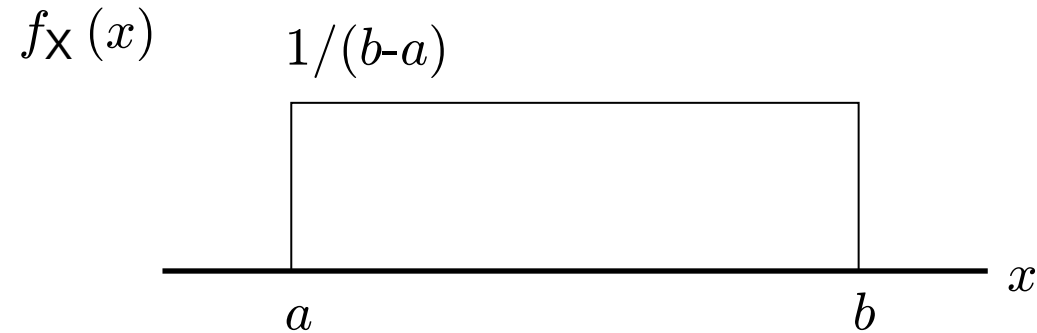


Variable aleatoria

Función de densidad de probabilidad

- Función densidad de probabilidad uniforme

Una variable aleatoria es uniforme si su fdp es de la forma

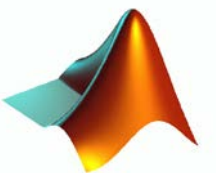


- El área, al integrar, tiene que ser 1. Por eso se ajusta la amplitud.
- Sólo existen resultados entre dos valores a y b , y cualquier segmento de igual longitud tiene la misma probabilidad.

$$\text{Media} = (a+b)/2$$

$$\text{Varianza} = (b-a)^2/12$$

- Ejemplo: Valor de una resistencia conocidos su valor nominal y su tolerancia



Variable aleatoria

Definiciones

- Función de distribución condicional

$$F_X(x|B) = P(X \leq x|B) = \frac{P[(X \leq x) \cap B]}{P(B)}$$

- Función densidad de probabilidad condicional

$$f_X(x|B) = \frac{dF_X(x|B)}{dx}$$

- Función de distribución conjunta (o bidimensional)

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

- Función densidad de probabilidad conjunta (o bidimensional)

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{dF_{X,Y}(x, y)}{dx dy}$$

Variable aleatoria Estadísticos

- Una caracterización estadística **completa** de una variable aleatoria requiere que sea posible determinar la probabilidad de cualquier evento definido en el espacio muestral
- En muchas aplicaciones no es necesaria una caracterización completa si se conoce el comportamiento *promedio* de la variable aleatoria
- En tratamiento digital de señales generalmente interesan promedios estadísticos y no caracterizaciones estadísticas completas
- La clave del estudio de estos promedios estadísticos es la **esperanza matemática** (o *valor esperado*)

Ejemplo: Experimento del dado. Si el dado se lanza N_T veces y el valor k aparece n_k veces, la *media muestral* es

$$\langle X \rangle_{N_T} = \frac{n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + 6n_6}{N_T}$$

Si $N_T \gg 1$, entonces $n_k/N_T \approx P(x=k)$, y la expresión anterior queda

$$\langle X \rangle_{N_T} \approx \sum_{k=1}^6 kP(x = k)$$

Variable aleatoria Estadísticos

- El *valor esperado* o *esperanza matemática* de una variable aleatoria X en la que se asume que la probabilidad de que una realización tome un valor x es $P(x)$, es

$$E[X] = \sum_x xP(x)$$

- En términos de la función de densidad de probabilidad, esta expresión queda expresada como

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

- La primera expresión sólo tiene sentido para variables aleatorias discretas. La segunda sirve tanto para variables aleatorias discretas como continuas
- La esperanza matemática es un operador lineal

Ejemplo: Esperanza matemática de la v.a. “tirar el dado”

Ejemplo: Esperanza matemática de la v.a. “valor de una resistencia”

Variable aleatoria Estadísticos

- Esperanza matemática de una función de una variable aleatoria:
 - Supongamos una variable aleatoria X con función densidad de probabilidad $f_X(x)$, y otra variable aleatoria $Y=g(X)$. Entonces, se cumple

$$E[Y] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

- Ejemplo: $Y=X^2$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx$$

- Ejemplo: $Y=|X|$

$$E[|X|] = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx = \int_0^{\infty} x [f_X(x) + f_X(-x)] dx$$

Variable aleatoria Estadísticos

- Otro valor estadístico importante es la **varianza**, que se define como

$$\text{var}(X) = \sigma_X^2 = E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x) dx$$

- La raíz cuadrada de la varianza se denomina *desviación típica*
-

Notación

En muchos textos, las variables aleatorias se representan mediante una realización genérica x (minúsculas). En ese caso las integrales deben realizarse sobre otra variable.

Es muy habitual encontrar para la función densidad de probabilidad una representación como

$$p_X(x) = f_X(x)$$

Incluso en ocasiones se omite el subíndice