

Señales aleatorias en variable discreta

Probabilidad

Introducción

- Dos grandes tipos de señales:
 - Deterministas
 - Pueden ser reproducidas exactamente repitiendo la medición
 - Existe algún tipo de representación exacta de la señal
 - Ej.: Respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante
 - Aleatorias
 - No pueden reproducirse de una manera predecible
 - No existe una representación/expresión cerrada de la señal
 - Ej.: Ruido en comunicaciones
- Gran parte de las señales que se utilizan en aplicaciones reales son aleatorias o deben ser tratadas como tal por tener valores desconocidos a priori

- **“Problema”**: las señales aleatorias no pueden ser tratadas como las deterministas
 - Las señales aleatorias sólo pueden describirse probabilísticamente o en términos de su comportamiento “promedio”
- **¿Solución?**

Utilizar **herramientas estadísticas** para modelar las señales aleatorias y su comportamiento al atravesar los sistemas

 - Considerar las señales como realizaciones de procesos estocásticos
 - Estudiar sus propiedades y diseñar mecanismos óptimos en función de tales propiedades
- **Revisión de conceptos sobre probabilidad y procesos estocásticos**

Probabilidad

- Tenemos un determinado experimento ε , y un espacio muestral Ω constituido por el conjunto de todos los posibles resultados de ε .

- Ejemplo:

$$\varepsilon = \text{tirar un dado}, \quad \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Se define la probabilidad del suceso A , $P(A)$, que cumple una serie de propiedades:

$$P(A) \in \mathbb{R}$$

$$P(A) \geq 0$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$\text{si } A \cap B = \emptyset, \text{ entonces } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$\text{si } A \cap B \neq \emptyset, \text{ entonces } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Ejemplo: si se tira un dado no trucado, cualquiera de las caras puede resultar por igual al lanzarlo. Si se lanza el dado N veces, y el número de veces que resulta un 1 es n_1 , debería cumplirse

$$\frac{n_1}{N} \approx \frac{1}{6}$$

- Así, la probabilidad de cada resultado debería ser la misma y se asigna como $1/6$

- ***Definición de Laplace*** (Válida cuando los sucesos son equiprobables)

La probabilidad de un suceso A es el número de casos favorables (r_A) entre el número total de casos posibles (R).

Ejemplo: No es válida con un dado trucado.

- ***Definición basada en frecuencia relativa***

Si repito r veces el experimento la probabilidad es

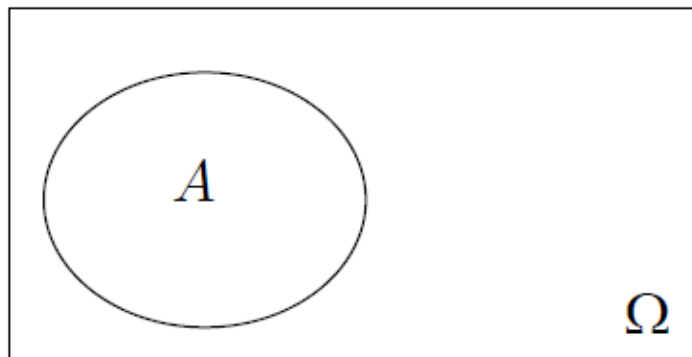
$$P(A) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r_A}{r}$$

Inconveniente: infinitos experimentos

Probabilidad condicional

$$P(A|B)=P(A\cap B)/P(B)$$

- “Truco”



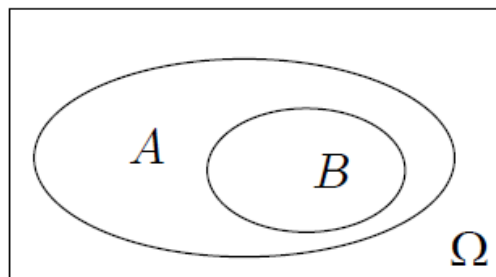
Probabilidad condicional

$$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$$

Casos particulares:

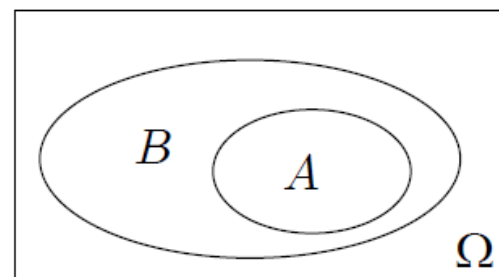
$$B \subset A \Rightarrow P(A|B) = 1$$

Si ocurre B también ocurre A



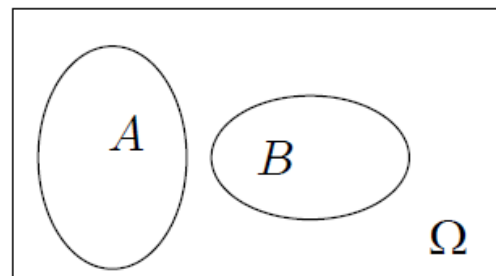
$$A \subset B \Rightarrow P(A|B) = P(A) / P(B) \geq P(A)$$

Tenemos más seguridad de que ocurra A que la que teníamos a priori



$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A|B) = 0$$

Si ocurre B no ocurre A



Si $P(A|B) = P(A)$, B no aporta ninguna información, y A y B son sucesos **independientes**, y cumplen:

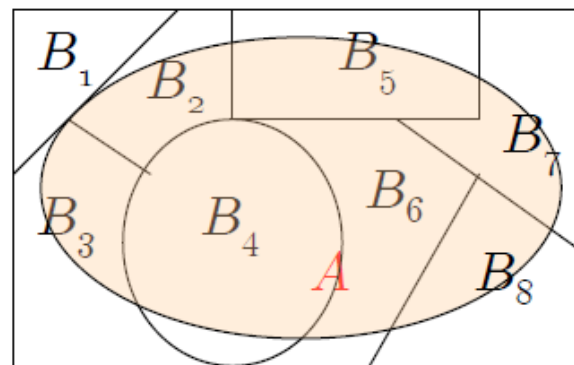
$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Probabilidad total y Teorema de Bayes

- Supongamos nuestro espacio muestral como la unión de conjuntos (particiones) más pequeños:

$$\Omega = \cup_i B_i$$

con $B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i, j$



Teorema de probabilidad total

$$P(A) = \sum_i P(B_i)P(A|B_i)$$

Combinándolo con la definición de probabilidad condicional, aparece el

Teorema de Bayes

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}$$