

Análisis y Diseño de Filtros Digitales

Representación en el plano z

Función de sistema

- Hemos caracterizado los sistemas (lineales e invariantes) por medio de dos respuestas equivalentes:
 - Respuesta al impulso, $h[n]$
 - Respuesta en frecuencia, $H(\omega)$
- Vamos a emplear una tercera función para caracterizar sistemas:
 - Función de sistema, $H(z)$

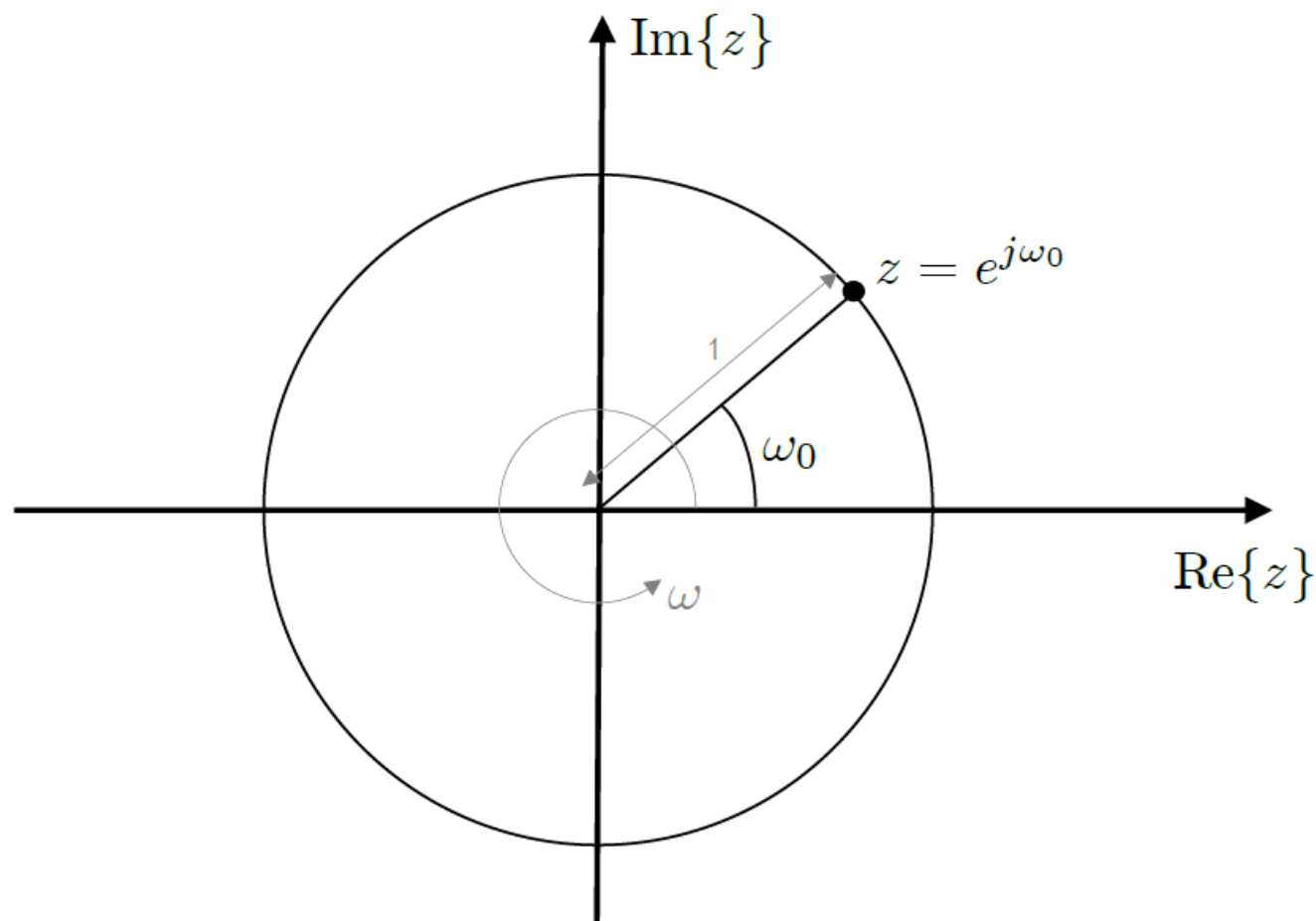
$$H(z) = TZ\{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

Como en todos los casos de transformación, la Transformada Z consiste en la representación de la señal en términos de unas funciones “base” $\{\phi[n; z]\} = \{z^n\}$, $n \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C}$

$$h[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

Representación en el plano z

- Al tratarse de una representación en una variable compleja, se suele hacer en el denominado *plano z*



$$H(z)|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} = TF\{h[n]\}$$

Transformada z

- Algunas propiedades útiles de la Transformada z

- Linealidad

$$TZ\{ax[n] + by[n]\} = aX(z) + bY(z)$$

- Desplazamiento

$$TZ\{x[n - n_0]\} = z^{-n_0} X(z)$$

- Convolución

$$TZ\{x[n] * y[n]\} = X(z)Y(z)$$

Representación en el plano z

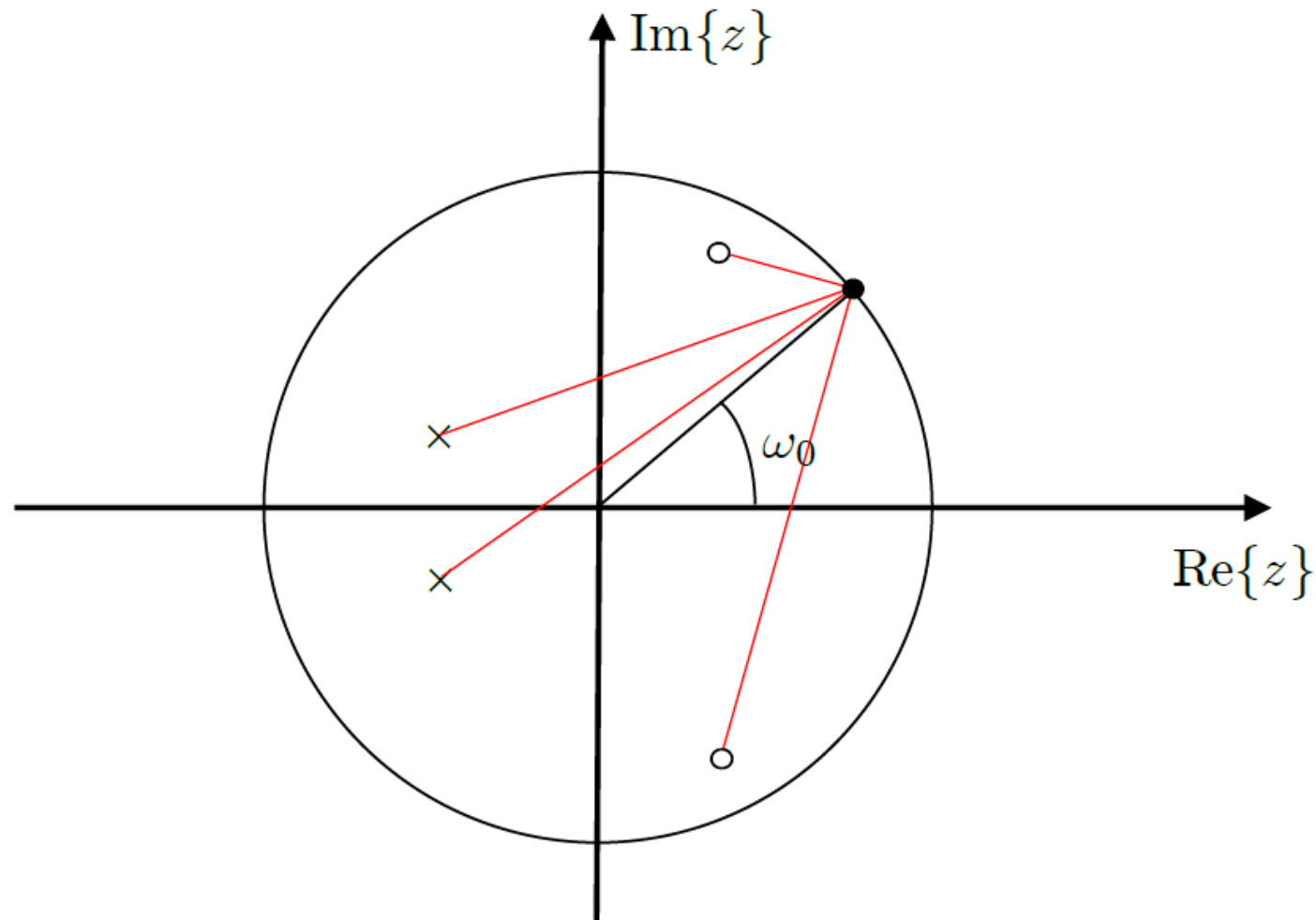
- Supongamos un filtro digital dado por

$$y[n] = x[n] + b_1 \cdot x[n-1] + b_2 \cdot x[n-2] + a_1 \cdot y[n-1] + a_2 \cdot y[n-2]$$

Representación en el plano z

- Supongamos un filtro digital dado por

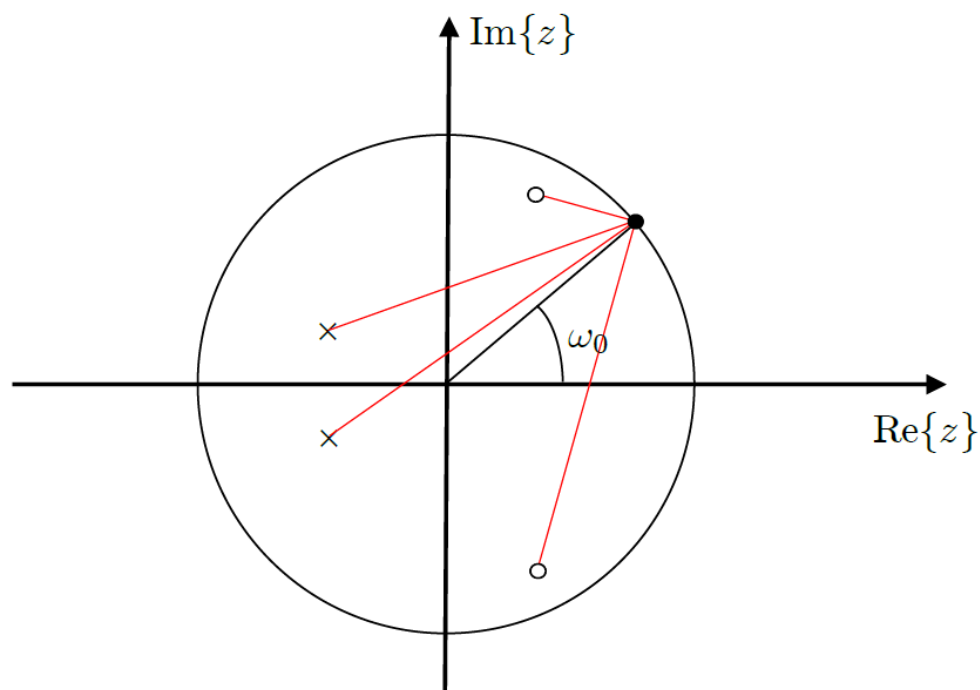
$$y[n] = x[n] + b_1 \cdot x[n-1] + b_2 \cdot x[n-2] + a_1 \cdot y[n-1] + a_2 \cdot y[n-2]$$



Representación en el plano z

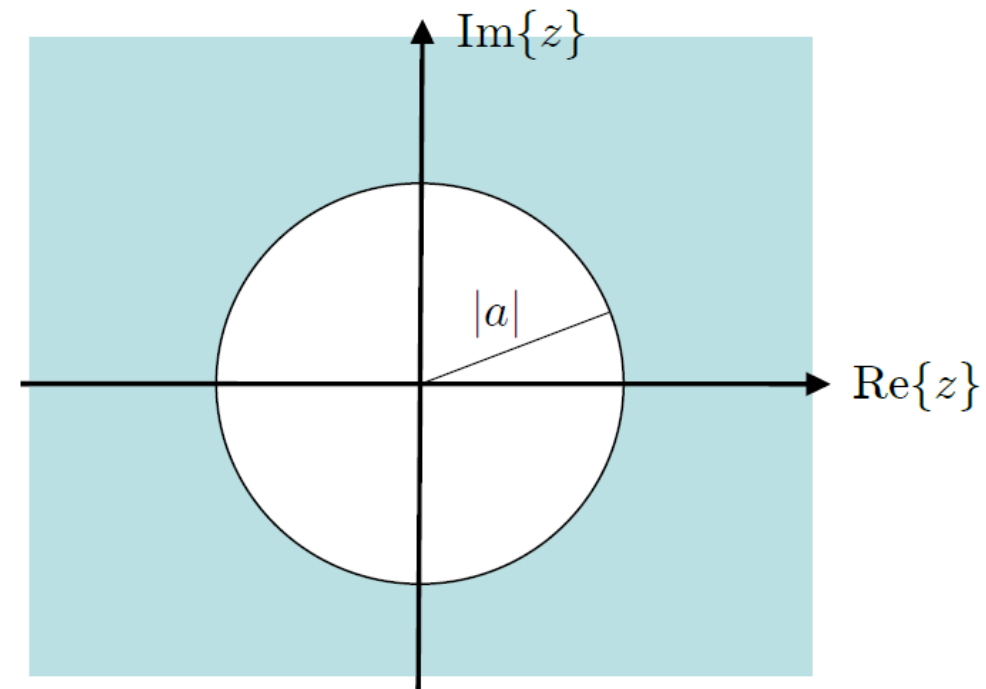
- Supongamos un filtro digital dado por

$$y[n] = x[n] + b_1 \cdot x[n-1] + b_2 \cdot x[n-2] + a_1 \cdot y[n-1] + a_2 \cdot y[n-2]$$



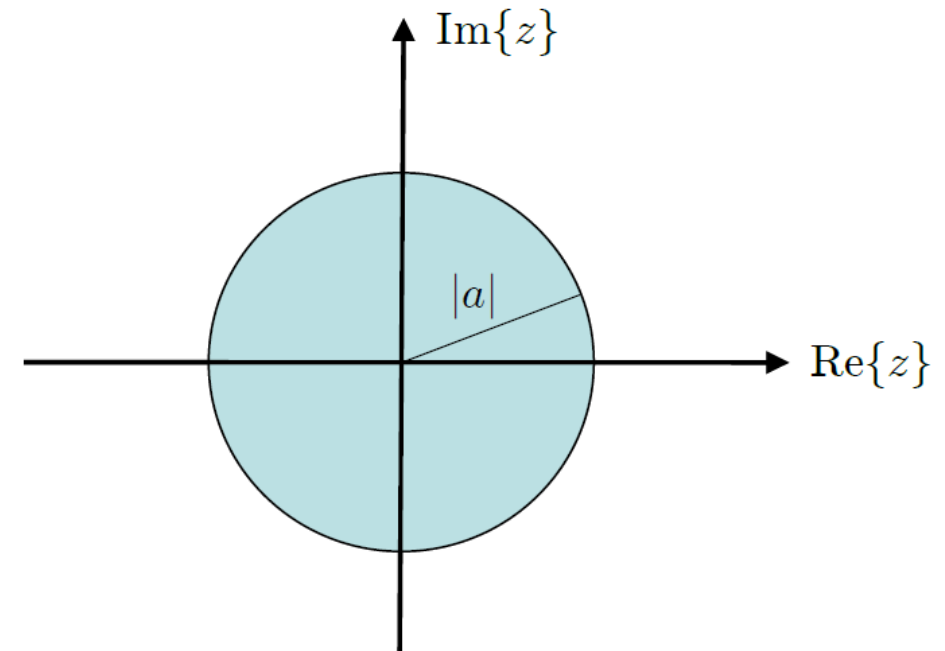
Representación en el plano z

- Hemos mencionado que la Transformada z puede no estar definida para todo valor de la variable z
- Los valores de z donde está definida esta transformada constituyen la Región de Convergencia (ROC)



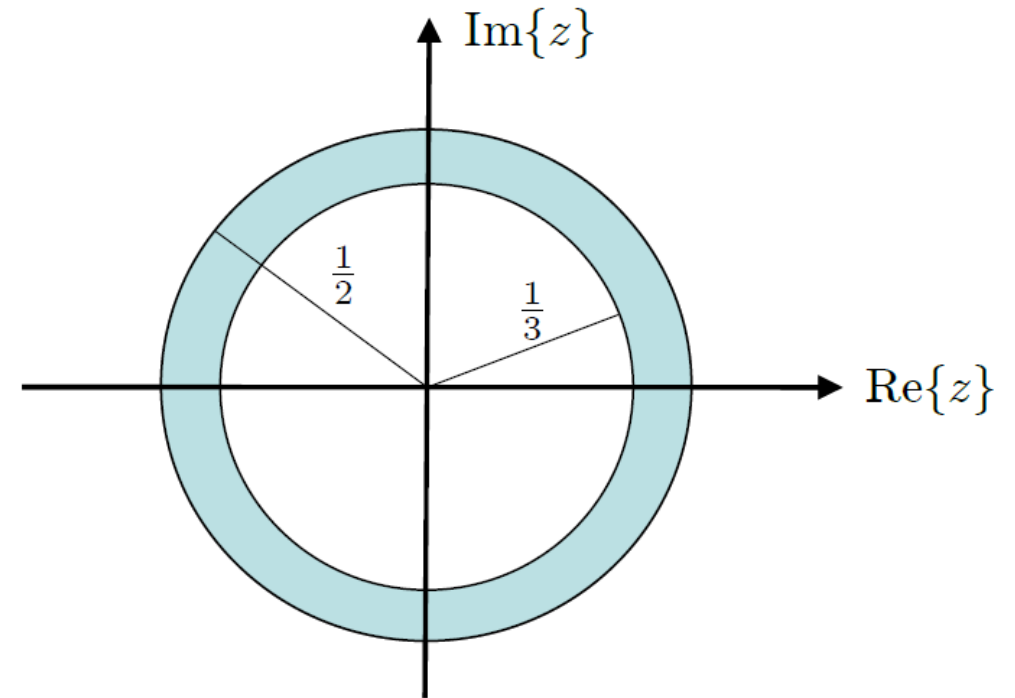
Representación en el plano z

- Hemos mencionado que la Transformada z puede no estar definida para todo valor de la variable z
- Los valores de z donde está definida esta transformada constituyen la Región de Convergencia (ROC)



Representación en el plano z

- Hemos mencionado que la Transformada z puede no estar definida para todo valor de la variable z
- Los valores de z donde está definida esta transformada constituyen la Región de Convergencia (ROC)



Transformada z

Sequence	Transform	ROC
1. $\delta[n]$	1	All z
2. $u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
3. $-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$
4. $\delta[n - m]$	z^{-m}	All z except 0 (if $m > 0$) or ∞ (if $m < 0$)
5. $a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
6. $-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $
7. $na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
8. $-na^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $
9. $[\cos \omega_0 n] u[n]$	$\frac{1 - [\cos \omega_0] z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_0] z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
10. $[\sin \omega_0 n] u[n]$	$\frac{[\sin \omega_0] z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_0] z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
11. $[r^n \cos \omega_0 n] u[n]$	$\frac{1 - [r \cos \omega_0] z^{-1}}{1 - [2r \cos \omega_0] z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
12. $[r^n \sin \omega_0 n] u[n]$	$\frac{[r \sin \omega_0] z^{-1}}{1 - [2r \cos \omega_0] z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
13. $\begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N - 1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}}$	$ z > 0$

Transformada z

- Algunas propiedades útiles de la Transformada z

- Linealidad

$$TZ\{ax[n] + by[n]\} = aX(z) + bY(z)$$

ROC: al menos $R_x \cap R_y$

- Desplazamiento

$$TZ\{x[n - n_0]\} = z^{-n_0} X(z)$$

ROC: $R_x \pm 0, \infty$

- Convolución

$$TZ\{x[n] * y[n]\} = X(z)Y(z)$$

ROC: al menos $R_x \cap R_y$

- Producto

$$TZ\{x[n]y[n]\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)Y(z/v)v^{-1}dv$$