

Señales y sistemas de variable discreta

Diezmado e interpolación

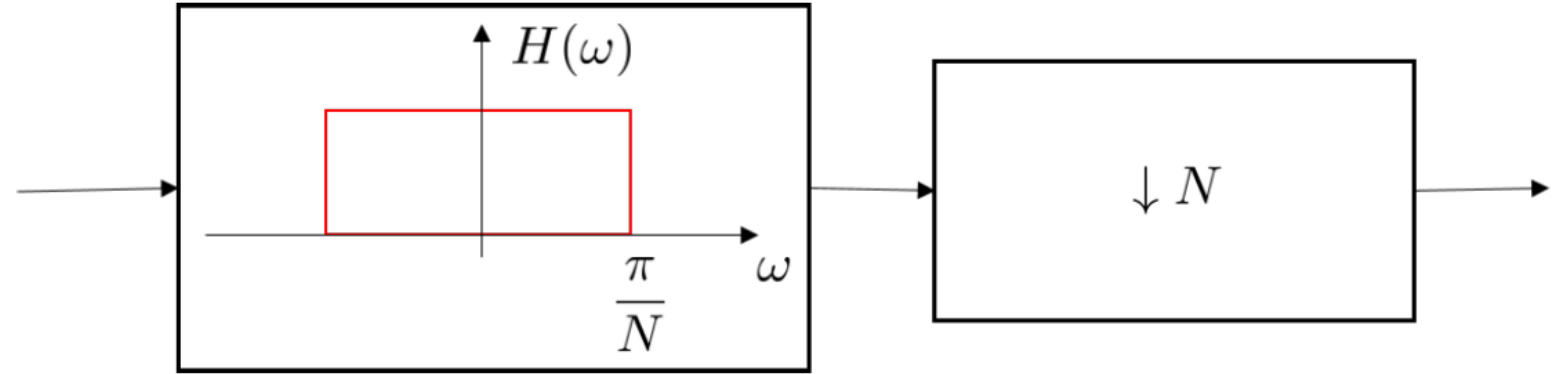
Señales de
variable discreta
Cambio de la tasa
de muestreo

- Una vez muestreada correctamente la señal, **sus muestras la representan** completamente.
- Se puede transformar la señal discreta para llevarla al estado en que estaría con otra velocidad de muestreo.
- Modificación de la tasa de muestreo mediante **procesado de señal**.
 - Diezmado: aumentar T_s = reducir F_s
 - Interpolación: reducir T_s = aumentar F_s

Señales de
variable discreta
Diezmado

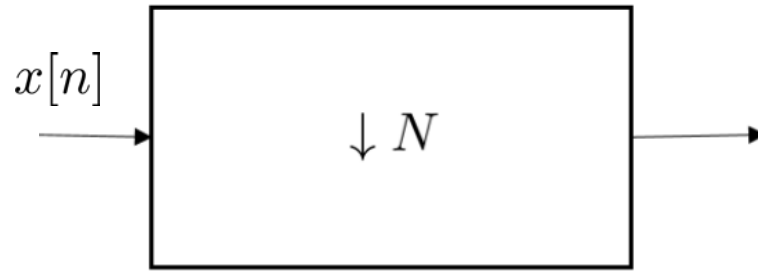
- El diezmado es la reducción de la tasa de muestreo mediante procesado
- Motivación muy variada. Ejemplo:
 - Muestreo de señal continua con espectro con componentes frecuenciales elevadas
 - Solución: filtro *anti-aliasing* con respuesta paso bajo para limitar banda
 - El filtro no es ideal: se necesita algo más
 - Se puede muestrear a mayor velocidad y luego eliminar muestras sobrantes mediante diezmado

Señales de
variable discreta
Diezmado



- Estructura en dos bloques
- $N =$ factor de diezmado: $F_{s2} = F_{s1}/N$
- Comenzaremos estudiando el segundo bloque

Señales de variable discreta Diezmado



- Dividimos el bloque en dos pasos
- Primera parte: multiplicar la señal de entrada por un tren de deltas de periodo N

$$z[n] = x[n] \cdot f[n] \qquad f[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN]$$

- Empleamos su desarrollo en serie de Fourier

$$f[n] = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \qquad f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \qquad f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$$

Señales de
variable discreta
Diezmado

- Estudiamos el espectro de la señal producto:

$$Z(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} e^{-j\omega n}$$

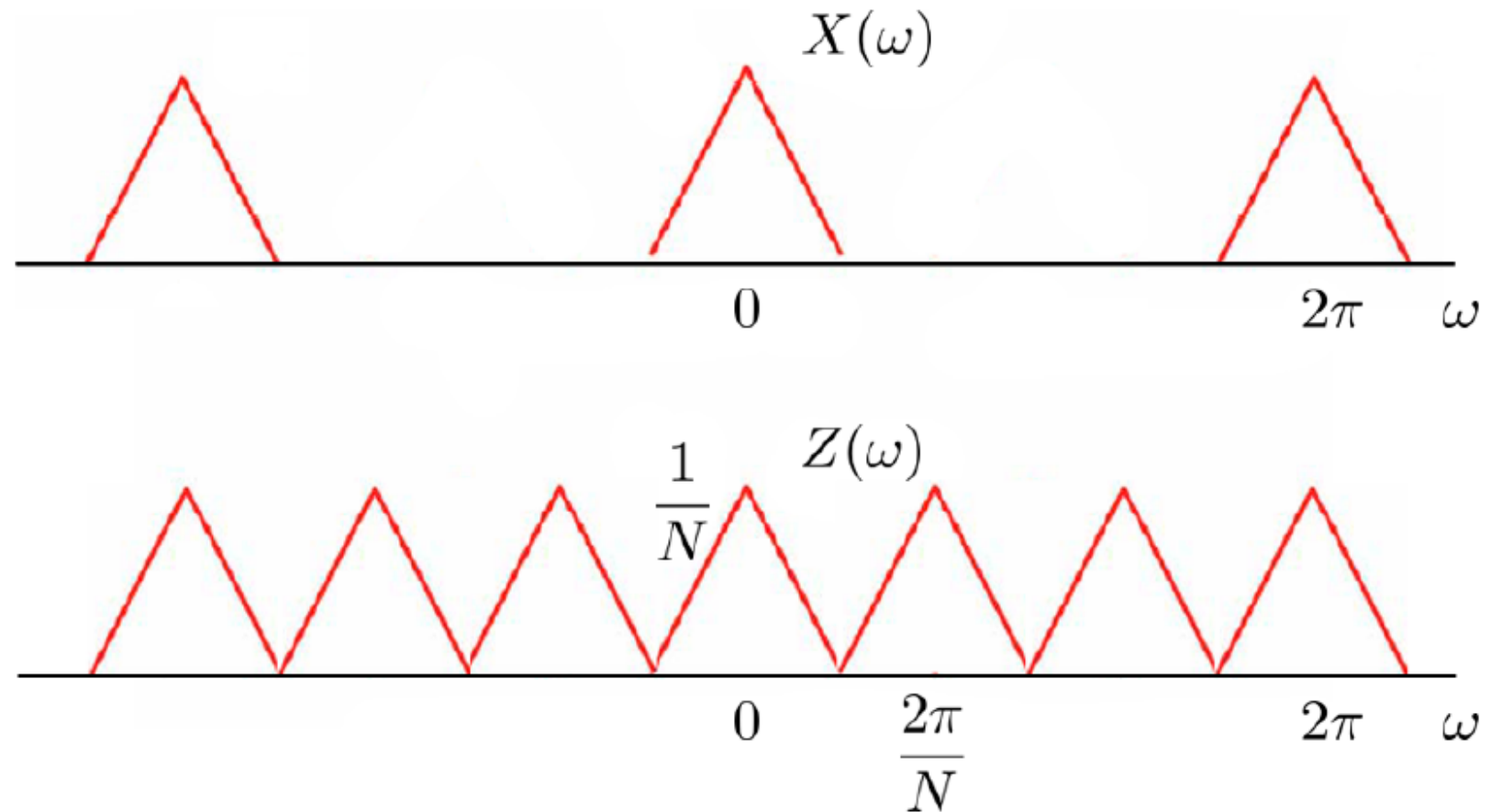
$$Z(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} x[n] e^{-j(\omega - \frac{2\pi}{N}k)n}$$

- Una parte de esta expresión es la Transformada de Fourier de $x[n]$
- Por ello:

$$Z(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X \left(\omega - \frac{2\pi}{N}k \right)$$

Señales de
variable discreta
Diezmado

Ejemplo: $N=3$



Señales de
variable discreta
Diezmado

- Segunda parte: eliminar las muestras que se han multiplicado por cero:

$$y[n] = z[nN]$$

- Para compararlas, vemos los términos de sus TF:

$$Z(\omega) = \dots + x[0]e^{j\omega 0} + 0 + \dots + 0 + x[N]e^{-j\omega N} + 0 + \dots + 0 + x[2N]e^{-j\omega 2N} + \dots$$

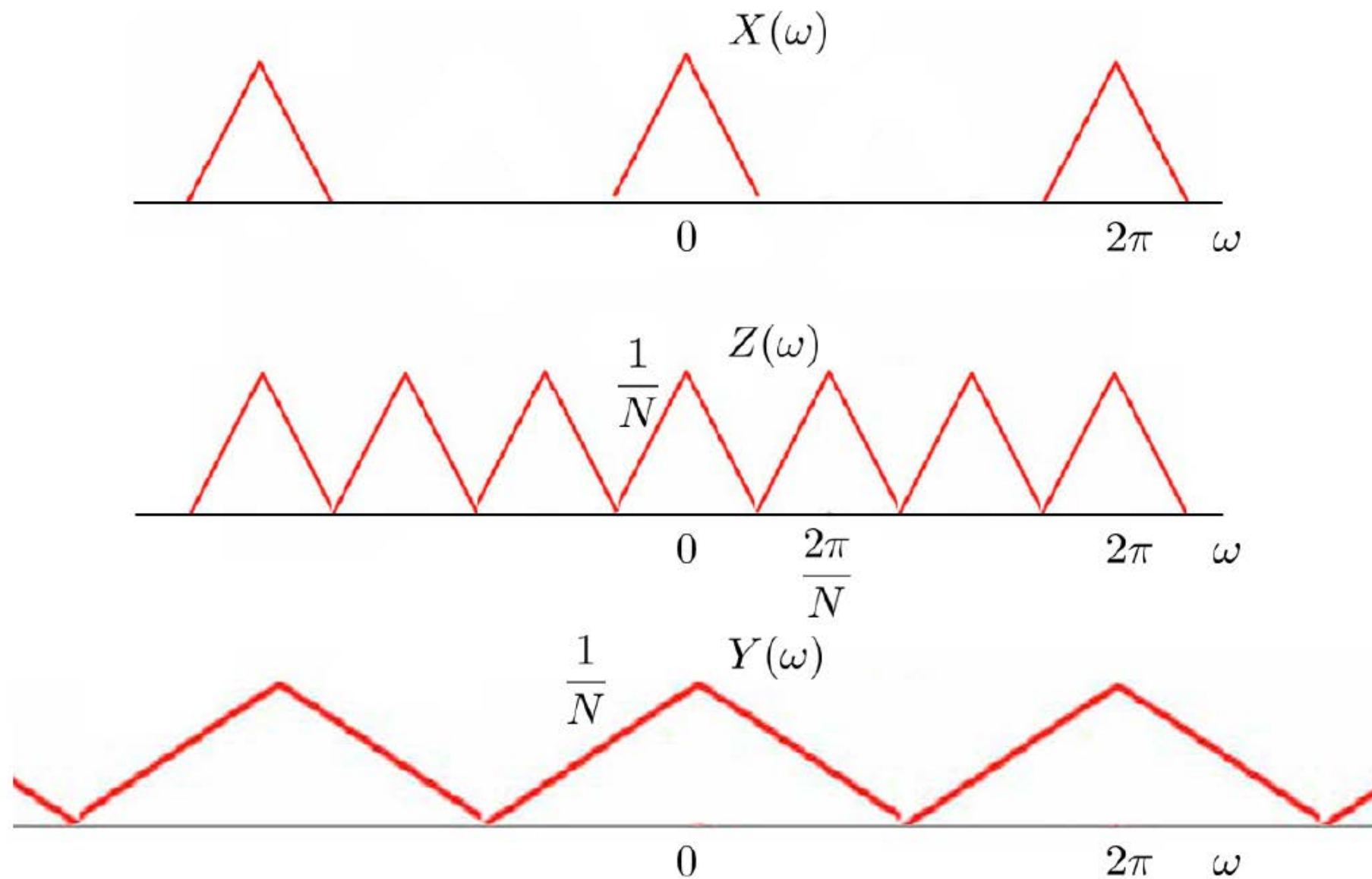
$$Y(\omega) = \dots + x[0]e^{j\omega 0} + \dots + x[N]e^{-j\omega 1} + \dots + x[2N]e^{-j\omega 2} + \dots$$

- Sus términos son iguales salvo que la pulsación va o no multiplicada por N . De ahí:

$$Z\left(\frac{\omega}{N}\right) = Y(\omega)$$

Señales de
variable discreta
Diezmado

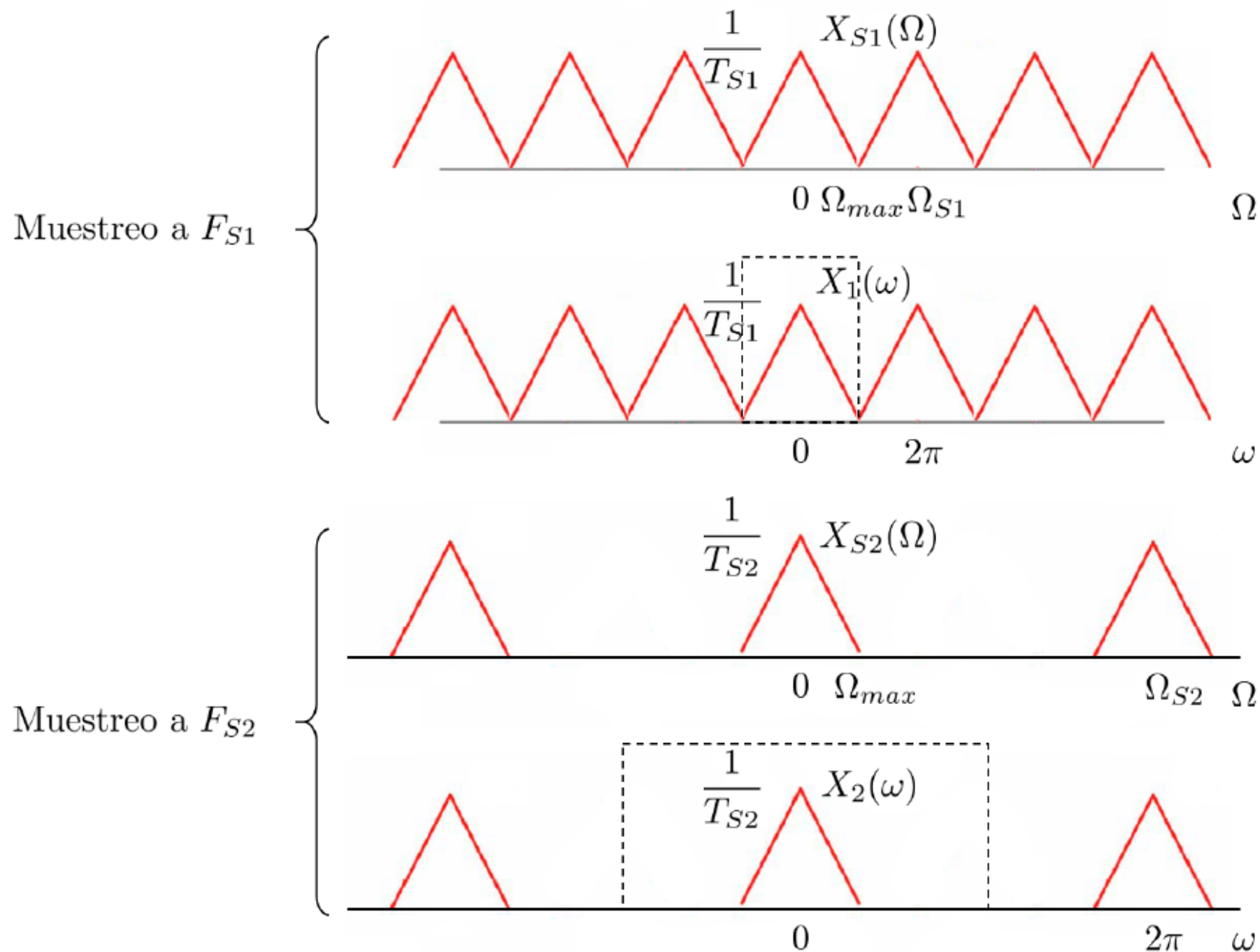
Ejemplo: $N=3$



Señales de
variable discreta
Interpolación

- La interpolación es el proceso inverso al diezmado: generar las muestras que se tendrían con mayor velocidad de muestreo
- ¿Es posible “inventarse” esas muestras que no se tomaron?
 - Si la señal está bien muestreada, sus muestras la representan
 - Se podría reconstruir la señal analógica completa, y por tanto también algunas de sus muestras
 - La información está implícita en las muestras

Señales de
variable discreta
Interpolación



Señales de variable discreta Interpolación

- También se divide en bloques
- Primera parte: hacemos “hueco” para las nuevas muestras separando las originales M (factor de interpolación)

$$y[n] = \begin{cases} x_1 \left[\frac{n}{M} \right], & n = 0, \pm M, \pm 2M \dots \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

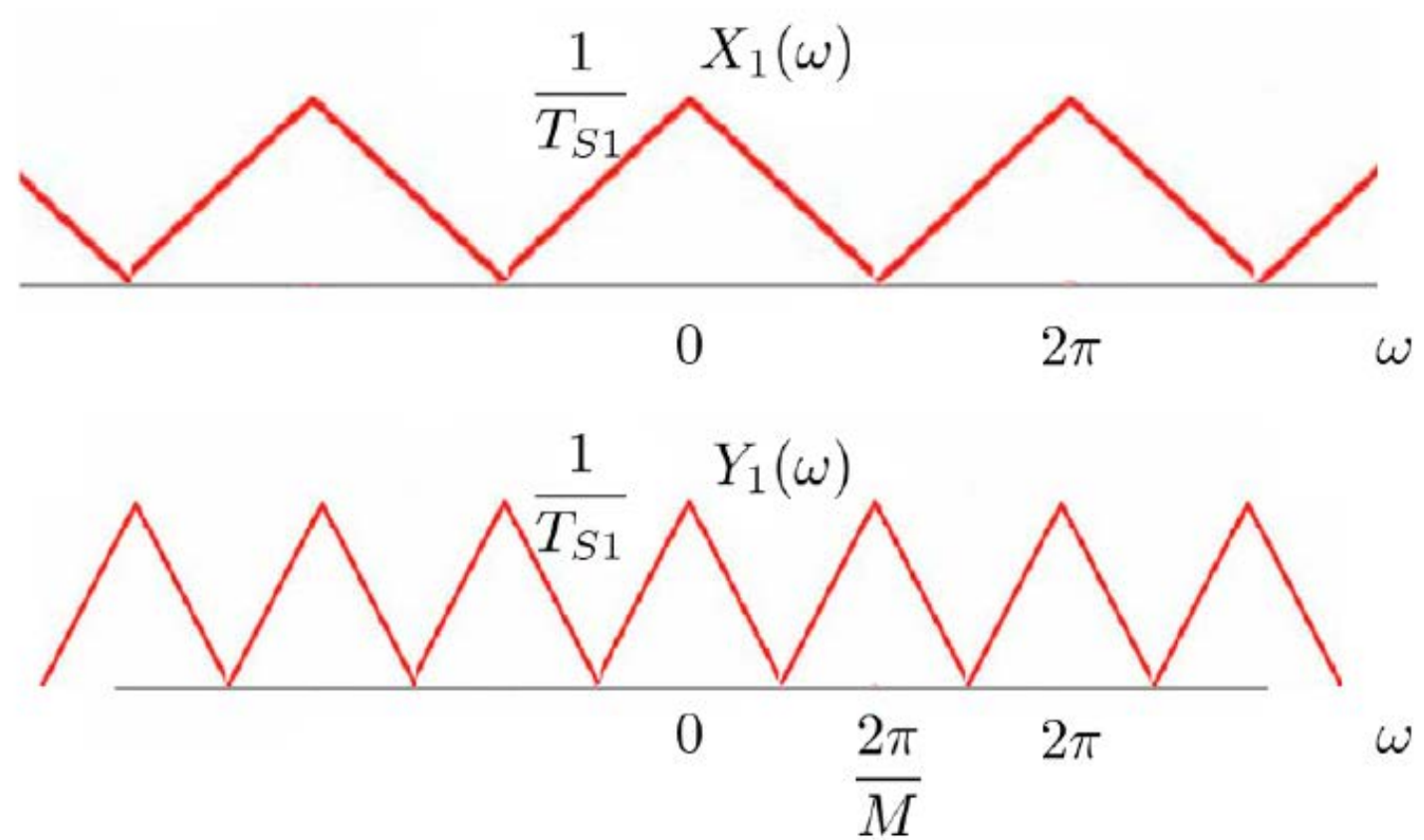
- En frecuencia

$$X_1(\omega) = \dots + x_1[0]e^{j\omega 0} + x_1[1]e^{j\omega 1} + x_1[2]e^{j\omega 2} + \dots$$

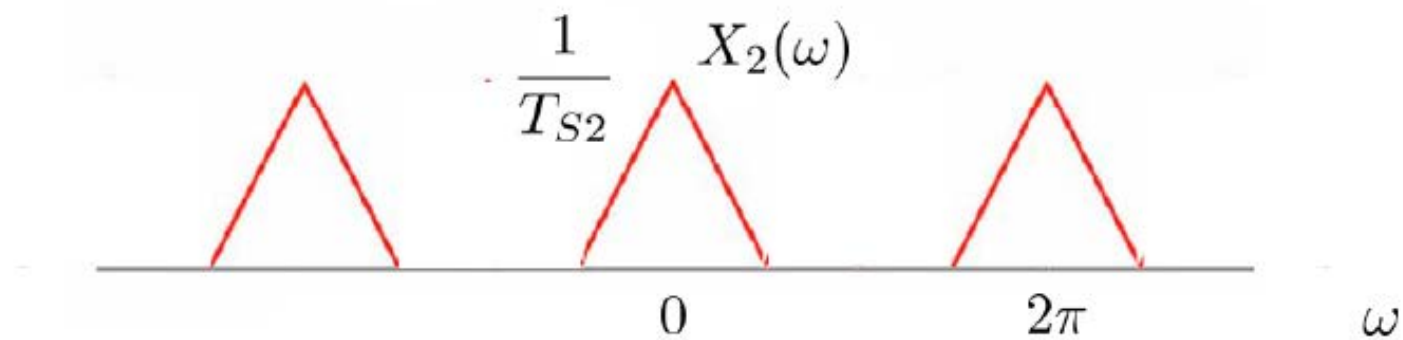
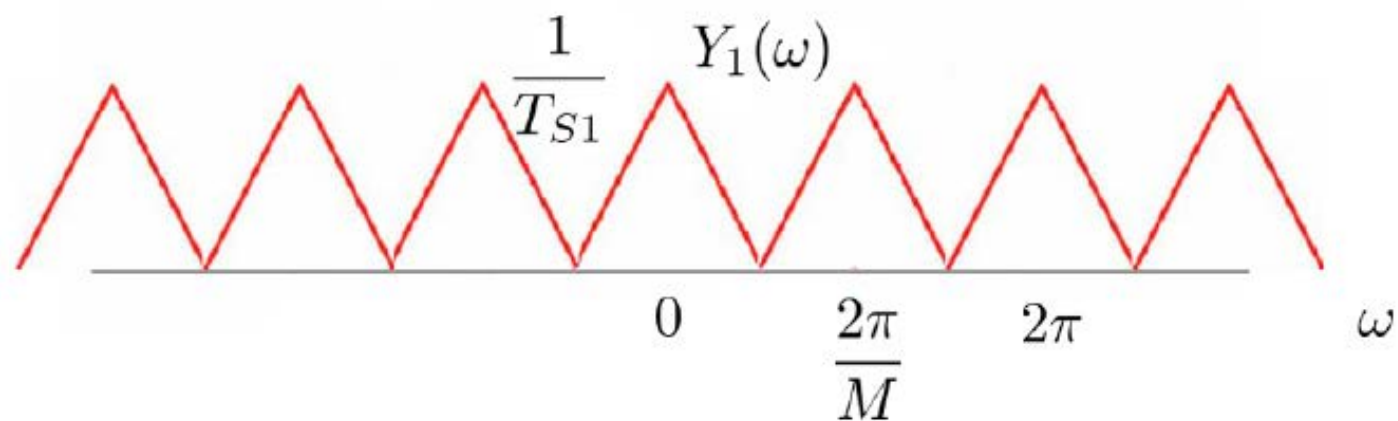
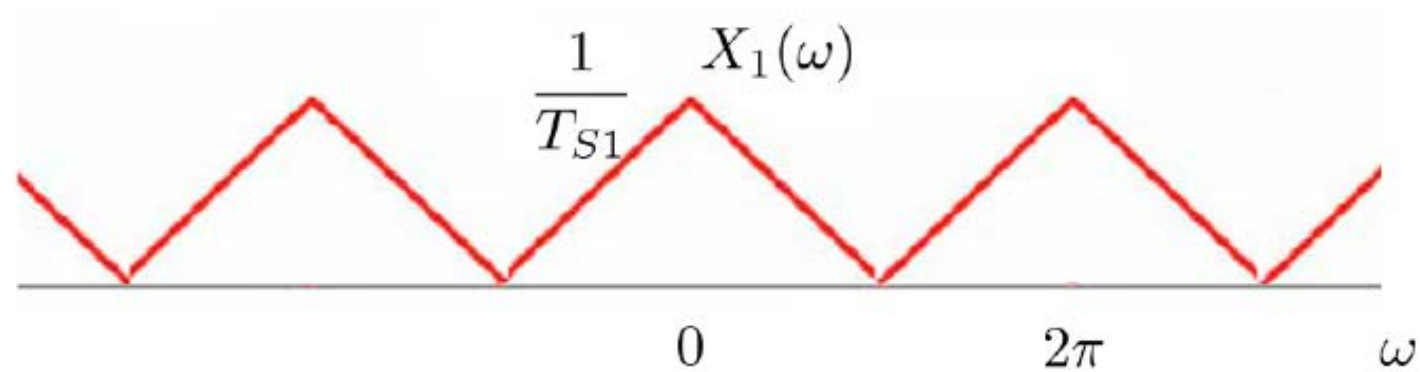
$$Y(\omega) = \dots + x_1[0]e^{j\omega 0} + 0 + \dots + 0 + x_1[1]e^{j\omega M} + 0 + \dots + 0 + x_1[2]e^{j\omega 2M} + \dots$$

$$Y(\omega) = X(\omega M)$$

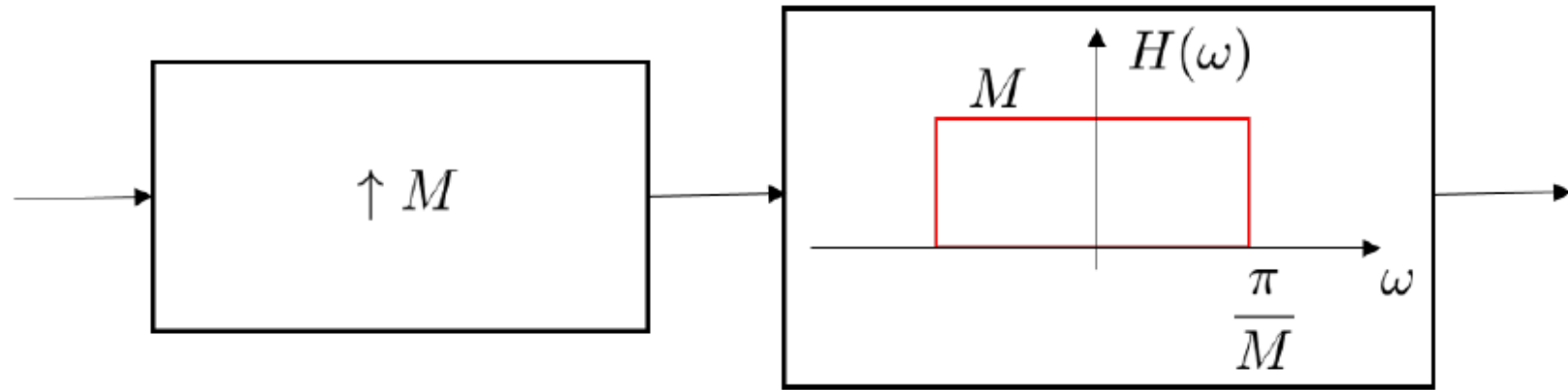
Señales de
variable discreta
Interpolación



Señales de
variable discreta
Interpolación



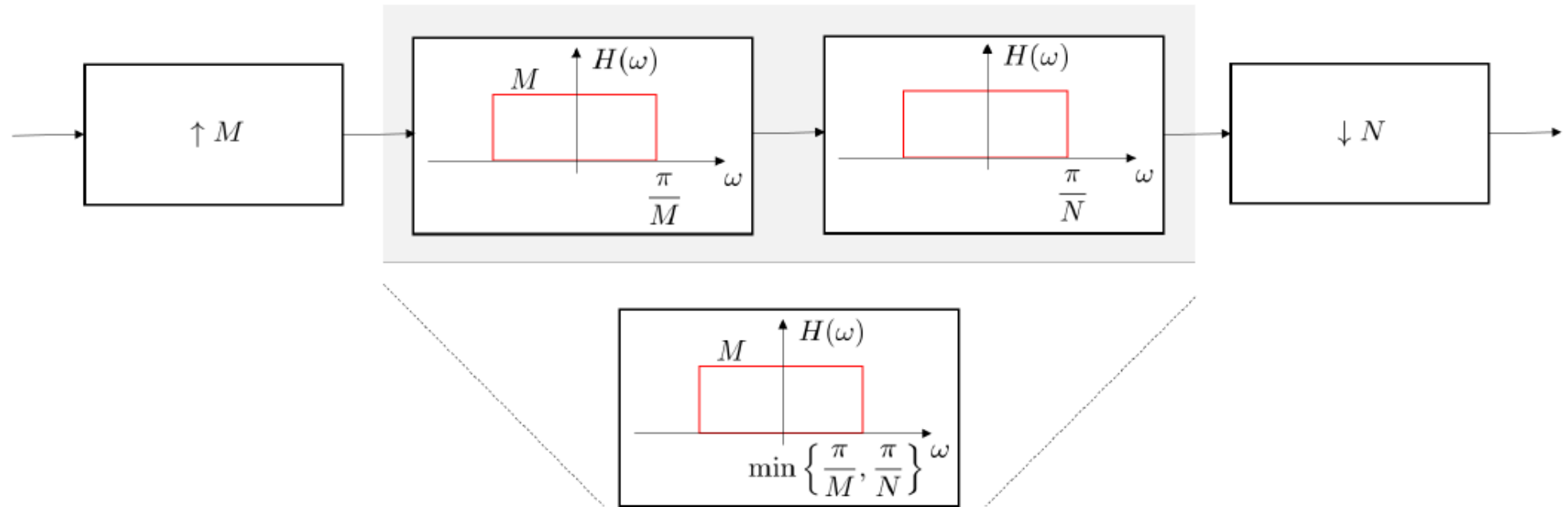
Señales de
variable discreta
Interpolación



Señales de
variable discreta
Cambio por un
factor racional

- Factor M/N :

$$F_{S2} = \frac{M}{N} F_{S1}$$



- Es importante el orden: riesgo de aliasing y pérdida de información