

Señales y sistemas de variable discreta

Filtros digitales

Filtros digitales

- Una clase importante de sistemas lineales e invariantes en el tiempo son aquellos en los que la entrada y la salida se relacionan por medio de una *ecuación lineal en diferencias de coeficientes constantes* de la forma

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k x[n-k]$$

- La salida en cada instante es una combinación lineal de las entradas y de las demás salidas
- Generalmente el número de coeficientes no nulos (orden) es finito, y en un caso real se tratará de un sistema causal, de forma que la **ecuación en diferencias** puede reescribirse como

$$\sum_{k=0}^M a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k], \quad a_0 = 1$$

- La salida actual es una combinación lineal de la entrada actual, las últimas N entradas y las últimas M salidas

$$y[n] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^M a_k y[n-k]$$

Filtros digitales

- La ecuación en diferencias es recurrente y por tanto no está completamente definida la salida del sistema

- Para caracterizarlo completamente hacen falta unas condiciones iniciales

$$\sum_{k=0}^M a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k], \quad a_0 = 1, \quad y[n_0] = y_0$$

- En el caso particular en el que $M=0$, la ecuación en diferencias es

$$y[n] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k]$$

- La salida es una suma ponderada de la entrada actual y las N anteriores
- Como no hay recurrencia, conocida la entrada se conoce la salida sin necesidad de acudir a condiciones iniciales
- La respuesta al impulso del sistema es finita de duración $N+1$:

$$h[n] = \sum_{k=0}^N b_k \delta[n-k]$$

- Este tipo de filtro se denomina filtro de Respuesta al Impulso Finita, **FIR**
- En caso contrario, el general, filtro de Respuesta al Impulso Infinita, **IIR**

Filtros digitales

- Observando la representación de la respuesta de un filtro FIR causal con un número finito de coeficientes:

$$\left. \begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^N b_k x[n-k] \\ y[n] &= \sum_{k=0}^N h[k] x[n-k] \end{aligned} \right\} b_k = h[k]$$

- Si se consideran los siguientes vectores:

$$\mathbf{h} = [h[0], h[1], \dots, h[N]]^T = [b_0, b_1, \dots, b_N]^T$$

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} x[n] \\ x[n-1] \\ x[n-2] \\ \vdots \\ x[n-N] \end{bmatrix} \quad \text{Vector "run-time"}$$

- Entonces la salida del filtro FIR es

$$y[n] = \mathbf{h}^T \mathbf{x}_n$$

Si $h[n]$ toma valores reales, **coincide con el producto escalar**

Filtros digitales

- En el caso de un filtro IIR se definen los vectores

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} x[n] \\ x[n-1] \\ x[n-2] \\ \vdots \\ x[n-N] \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}[n] = \mathbf{y}_n = \begin{bmatrix} y[n] \\ y[n-1] \\ y[n-2] \\ \vdots \\ y[n-M] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = [b_0, b_1, \dots, b_N]^T \quad \mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_M]^T$$

$$\mathbf{a}^T \mathbf{y}_n = \mathbf{b}^T \mathbf{x}_n$$

- También se puede expresar como

$$y[n] = \mathbf{b}^T \mathbf{x}_n - \mathbf{a}_-^T \mathbf{y}_n^-$$

donde

$$\mathbf{a}_- = [a_1, \dots, a_M]^T \quad \mathbf{a} = [a_0, \mathbf{a}_-]^T$$

$$\mathbf{y}_n^- = [y[n-1], \dots, y[n-M]]^T \quad \mathbf{y}_n = [y[n], \mathbf{y}_n^-]^T$$

Filtros digitales

- Se ha indicado que para que la definición del filtro (IIR) sea completa, son necesarias unas condiciones iniciales
- Supongamos que la entrada al sistema es nula hasta el instante n_0 y que tenemos unas condiciones iniciales dadas por

$$y[n_0 - 1] = \alpha, \quad \alpha \neq 0$$

- En un sistema lineal, invariante y causal, si la entrada es nula la salida también debe serlo, pero la condición inicial lo impide, por lo que el sistema no puede ser lineal, invariante y causal
- Un sistema (IIR) definido por unas ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes es lineal, invariante y causal si, y sólo si, presenta **condiciones iniciales nulas (reposo inicial)**:
 - Si la entrada es nula hasta un determinado instante, la salida también ha de serlo