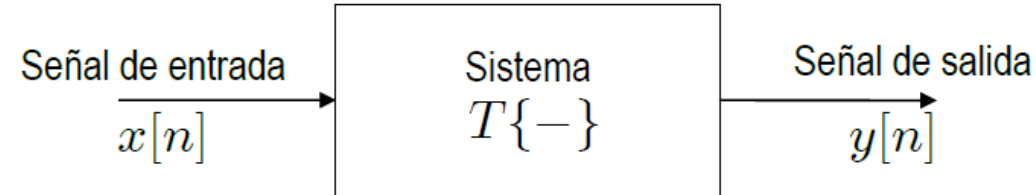


Señales y sistemas de variable discreta

Sistemas

Sistemas de variable discreta

- Un sistema es un operador matemático o mapeo que transforma una señal (entrada) en otra señal (salida) por medio de un conjunto definido de reglas o funciones



$$y[n] = T\{x[n]\}$$

- La notación $T\{-\}$ representa la transformación que aplica un sistema genérico a una señal de entrada para producir una salida
- Esta transformación puede especificarse de diferentes formas
- Ejemplos de sistema
 - Cuerdas vocales (transforman aire turbulento de los pulmones en sonidos)
 - Algoritmos (transforman datos numéricos en otros datos o resultados)
 - Operaciones matemáticas (transforman datos o funciones)
 - Amplificadores (transforman la señal de entrada en otra igual de diferente amplitud)
 - Corazón (transforma señales de presión sistólica/diastólica)
 - Etc.
- Un sistema está completamente caracterizado cuando la salida está definida para cualquier entrada

Sistemas de variable discreta

Propiedades

- **Linealidad**

- Es una de las propiedades más importantes en el análisis y diseño de sistemas
- Un sistema es lineal si la salida correspondiente a una combinación lineal de entradas es la misma combinación lineal de sus salidas

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\}$$

- La respuesta de un sistema lineal a una suma de señales es la suma de las dos respuestas, y el escalado de la entrada por una constante produce el escalado de la salida por la misma constante
- Si la entrada se descompone como una expansión en impulsos unitarios:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k]$$

la salida es

$$y[n] = T\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n - k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]$$

donde $h_k[n]$ es la respuesta del sistema a un impulso desplazado $\delta[n - k]$

- La salida se puede obtener como la superposición de las respuestas del sistema a cada una de las muestras unitarias que componen la señal

Sistemas de variable discreta

Propiedades

- **Invarianza** al desplazamiento
 - Es otra de las propiedades más importantes en el análisis y diseño de sistemas
 - Un sistema es invariante si al retrasar una entrada una cierta cantidad la salida es retrasada esa misma cantidad

$$T\{x[n - n_0]\} = y[n - n_0]$$

- Las propiedades de funcionamiento de un sistema invariante no cambian con el tiempo
- Si un sistema es lineal e invariante con $T\{\delta[n]\} = h[n]$

$$T\{\delta[n - k]\} = h_k[n] = h[n - k]$$

$$y[n] = T\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n - k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k]$$

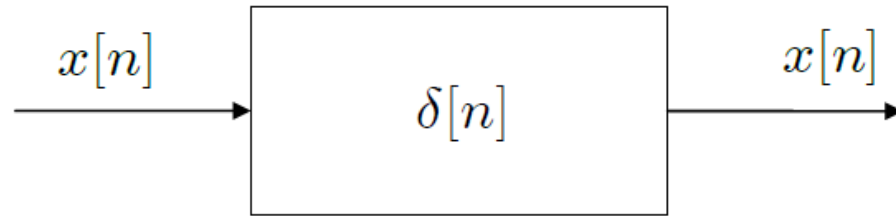
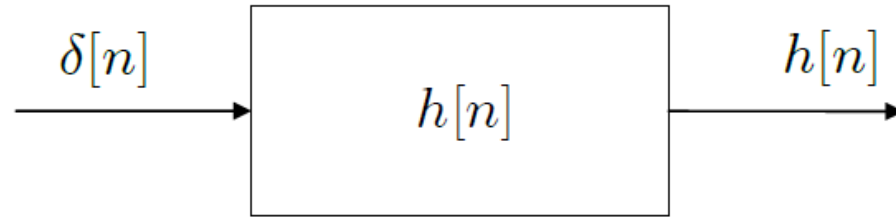
$$y[n] = x[n] * h[n]$$

- La salida de un sistema lineal e invariante es la **convolución** de la entrada con la respuesta del sistema al impulso unitario
 - Un sistema lineal e invariante está completamente caracterizado mediante la respuesta al impulso del sistema

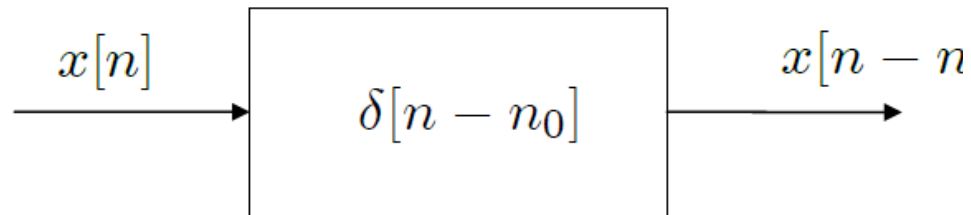
Sistemas de variable discreta

Propiedades

- Consecuencias



$$x[n] * \delta[n] = x[n]$$



$$x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]$$

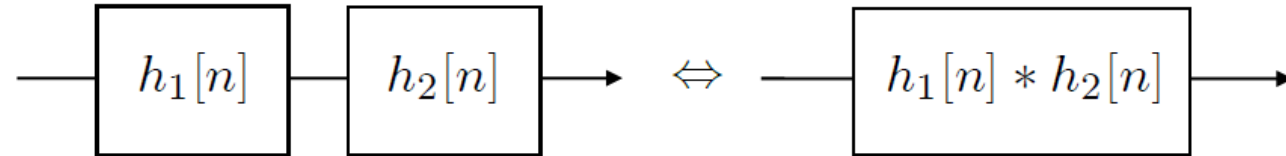
Sistemas de variable discreta

Propiedades

- Propiedades de la convolución:

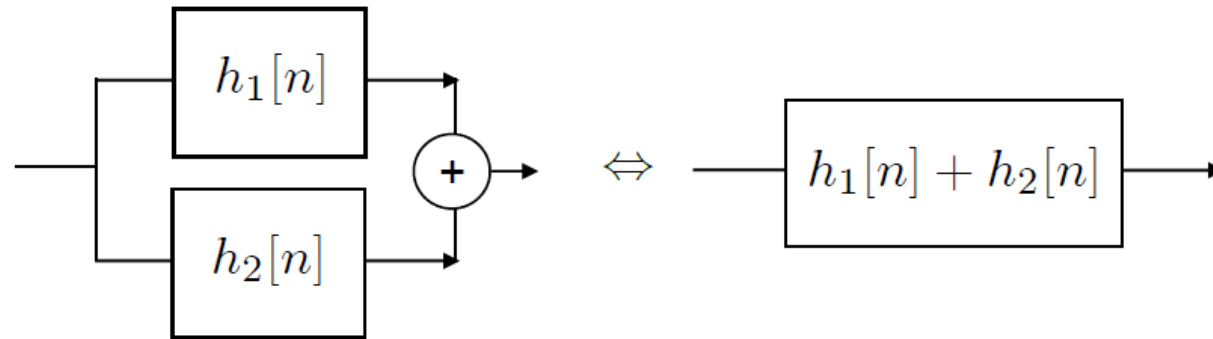
- Asociativa

$$(x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$$



- Distributiva respecto de la suma

$$x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] + h_2[n])$$



- Conmutativa

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

- Existencia de elemento neutro

$$x[n] * \delta[n] = x[n]$$

Sistemas de variable discreta

Propiedades

- De la propiedad conmutativa se tiene que la salida de un sistema lineal e invariante puede expresarse como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

- La salida de un sistema lineal e invariante es una combinación lineal de las muestras de la señal de entrada ponderadas por las muestras de la respuesta al impulso del sistema
- La salida de un sistema lineal e invariante es la superposición de la salida producida por cada una de las muestras unitarias ponderadas que constituyen la señal de entrada

Sistemas de variable discreta

Propiedades

- **Memoria**

- Un sistema no tiene memoria si el valor actual de la salida sólo depende del valor actual de la entrada
- Si el sistema es lineal e invariante, la respuesta al impulso es de la forma

$$h[n] = k\delta[n]$$

- **Causalidad**

- Un sistema es causal si su salida no depende de valores de entrada en instantes futuros
- Para cualquier valor n_0 la respuesta del sistema en el instante n_0 depende únicamente de valores de la entrada para $n \leq n_0$
- En un sistema causal no es posible que los cambios de la salida precedan a los de la entrada
- La respuesta al impulso de un sistema lineal, invariante y causal cumple

$$h[n] = 0, \quad \forall n < 0$$

- **Estabilidad**

- Un sistema es estable si para cualquier entrada acotada la salida también lo está

$$|x[n]| \leq A < \infty \Rightarrow |y[n]| \leq B < \infty$$

- En un sistema lineal e invariante la estabilidad está garantizada si

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

- **Invertibilidad**

- Un sistema es invertible si su entrada puede ser determinada unívocamente observando su salida
- Para que un sistema sea invertible, dos entradas diferentes no pueden producir la misma salida