

Señales y sistemas de variable discreta

Representación frecuencial y *aliasing*

Señales de variable discreta

Representación frecuencial

- El análisis en dominios transformados de las señales y los sistemas de tiempo discreto proporciona una potente herramienta de análisis y diseño que permite encontrar soluciones inalcanzables de otro modo
- La transformación depende de la elección de una base para la representación de la señal (o sistema)
- En Tratamiento Digital de Señales lo más habitual es escoger dos tipos de base:

- Funciones exponenciales complejas

$$\{\phi[n; \omega)\} = \{e^{j\omega n}\}, \quad n \in \mathbb{Z}, \omega \in \mathbb{R}$$

- Funciones “ z ”

$$\{\phi[n; z)\} = \{z^n\}, \quad n \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C}$$

- El primero de los casos da lugar a la representación en el dominio frecuencial, representada por la **Transformada de Fourier**
- El segundo de los casos da lugar a la representación en el plano z , denominada **Transformada Z**

Señales de variable discreta

Representación frecuencial

- El análisis en frecuencia de las señales y los sistemas de tiempo discreto es una de las principales herramientas de análisis y diseño en problemas de procesamiento digital de señales
- Una señal de variable discreta se puede expandir como una combinación lineal (infinita) de funciones exponenciales complejas, de la forma

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\omega) \phi[n; \omega] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

- Los coeficientes de esta expansión se obtienen como el producto escalar entre la señal y las funciones base (Transformada de Fourier)

$$X(\omega) = \langle x[n], \phi[n; \omega] \rangle$$

Señales de
variable discreta
Representación
frecuencial

$$X(\omega) = \langle x[n], \phi[n; \omega] \rangle$$

– Interpretación:

- El producto escalar entre dos vectores es proporcional al parecido entre ambos (colinealidad)
- Dado un valor de ω , y escogida por tanto una exponencial de la base, $e^{j\omega n}$, el valor de $X(\omega)$ será alto en la medida que la señal tenga como componente dicha exponencial compleja en el tiempo (a un tono puro en ω)
- Dada una señal compuesta por una suma de tonos, $X(\omega)$ tendrá valor alto para los valores de ω que formen parte de la composición de la señal
- Al ser base ortogonal, las componentes no presentes en la señal tendrán un valor bajo (nulo)
- Por tanto, la transformada de Fourier indica en qué medida está presente cada “frecuencia” en la señal original: composición frecuencial de la señal

Señales de
variable discreta
Representación
frecuencial

- Desarrollando el producto escalar obtenemos la siguiente expresión:

$$TF\{x[n]\} = X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- La variable ω se denomina pulsación discreta, y se relaciona con la frecuencia discreta f de la forma

$$\omega = 2\pi f$$

- La transformada inversa de Fourier es realmente la expansión de la señal como combinación lineal de sus funciones base, y se define como

$$TF^{-1}\{X(\omega)\} = x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n} d\omega$$

- Dado que el espectro es una función de una variable continua, es necesario integrar (no sirve un sumatorio)

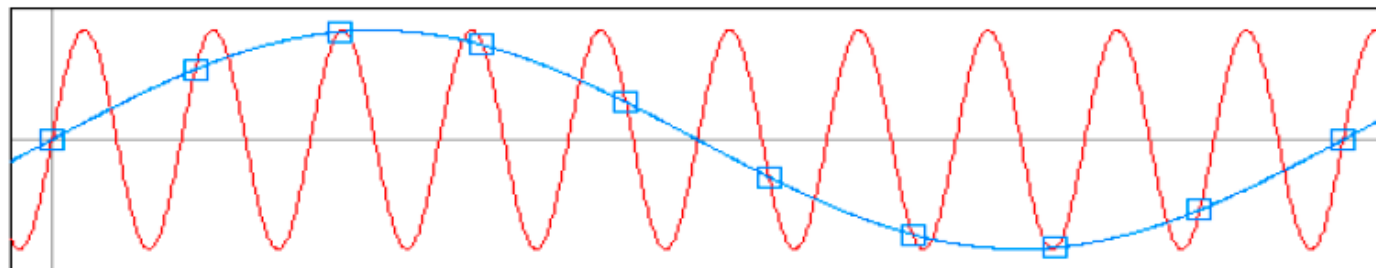
Señales de variable discreta

Aliasing

- Conclusiones:

- La periodicidad de un tono discreto no está garantizada
- Las señales de pulsación $|\omega| > \pi$ son indistinguibles de una réplica con $|\omega| \leq \pi$

- Aliasing



- Sólo puede reconstruirse una réplica espectral contenida en

$$f \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad \omega \in [-\pi, \pi]$$

- La frecuencia discreta se define como una normalización de la frecuencia de la señal analógica dada por

$$f = \frac{F}{F_S}$$

- Existe un eje de frecuencias en variable continua equivalente al de variable discreta
- Cambia el concepto de frecuencias altas y bajas con respecto al espectro de una señal de variable continua