

Señales y sistemas de variable discreta

Notación vectorial

Señales de variable discreta

Notación vectorial

- Un vector es un conjunto de valores reales o complejos, asumiendo siempre que se trata de una columna:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

- Si N es finito el vector se dice que es de dimensión N
- La dimensión podría ser infinita
- El vector transpuesto y el hermítico se definen como:

$$\mathbf{x}^T = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]$$

$$\mathbf{x}^H = (\mathbf{x}^T)^* = [x_0^*, x_1^*, \dots, x_{N-1}^*]$$

- Los vectores permiten representar las señales de tiempo discreto de manera sencilla. Así, si una señal tiene valores nulos fuera del intervalo $n \in [0, N-1]$

$$\mathbf{x}^T = [x[0], x[1], \dots, x[N-1]]$$

Señales de variable discreta

Notación vectorial

- La utilización de notación vectorial implica la definición de un espacio vectorial de señales de tiempo discreto, y por tanto la definición de un producto interno (escalar), una norma y una métrica
- El producto escalar de dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ complejos se define como

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle = \mathbf{a}^H \mathbf{b} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n^* \cdot b_n$$

- La norma de un vector puede definirse de varias formas. La más habitual es la norma *Euclídea* o *norma* L_2 , que se define como la raíz cuadrada del producto escalar de un vector consigo mismo:

$$||\mathbf{x}||_2 = \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 \right\}^{1/2}$$

- Típicamente se emplea la norma al cuadrado, y además el “2” se suele omitir, dado que esta norma se emplea casi exclusivamente

$$||\mathbf{x}||_2^2 = ||\mathbf{x}||^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^H \mathbf{x}$$

- La norma L_2 al cuadrado coincide con la energía de la señal

Señales de
variable discreta
Notación vectorial

- Otras normas útiles, aunque mucho menos utilizadas, son:

Norma L_1

$$||\mathbf{x}||_1 = \sum_{n=0}^{N-1} |x_n|$$

Norma L_∞

$$||\mathbf{x}||_\infty = \max_n |x_n|$$

- La definición de un producto escalar y una norma permiten establecer parecidos entre vectores, distancias, etc.
- La relación geométrica entre dos vectores establecida por medio del producto escalar se puede expresar también como

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle = ||\mathbf{a}|| \cdot ||\mathbf{b}|| \cos \theta$$

donde θ es el ángulo entre los dos vectores

- De acuerdo con esta relación, se cumple que

$$|\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle| \leq ||\mathbf{a}|| \cdot ||\mathbf{b}|| \quad |\mathbf{a}^H \mathbf{b}|^2 \leq ||\mathbf{a}||^2 ||\mathbf{b}||^2$$

- Esta desigualdad (Cauchy-Schwarz) es una igualdad cuando el ángulo entre los vectores es cero, es decir, cuando son colineales o proporcionales
- De otro modo, cuanto mayor es el producto escalar, más colineales son dos vectores

Señales de
variable discreta
Notación vectorial

- Una medida objetiva del parecido entre dos señales puede ser

$$|\gamma|^2 = \frac{|\mathbf{a}^H \mathbf{b}|^2}{\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2} \leq 1$$

- Esta medida se denomina coherencia, y es máxima (unidad) cuando las dos señales son proporcionales
- La medida que falta por definir es la métrica del espacio vectorial, la distancia entre dos vectores, que se define como la norma del vector diferencia:

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} |x_n - y_n|^2 \right\}^{1/2}$$

- En muchas aplicaciones será más interesante trabajar con la distancia al cuadrado

$$d^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2$$

Señales de variable discreta Notación vectorial

- La definición del producto escalar ha condicionado la definición de todas las demás medidas
- Se pueden obtener igualmente con otras definiciones de producto escalar
- Otras dos definiciones de interés en el curso son:
 - Para señales de potencia media finita:

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N a_n^* b_n$$

- Para señales modeladas como procesos aleatorios:

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle = E \{ a^*[n] b[n] \}$$

Notación provisional

donde $E\{-\}$ indica la *esperanza matemática* o *valor esperado*

- Estas definiciones serán de interés más adelante