CRISTALOGRAFÍA GEOMÉTRICA

TEMA 3

SIMETRÍA y REDES

ÍNDICE

3.1 SIMETRÍA CONTENIDA EN LAS REDES

- El cristal es simétrico porque es periódico. Su simetría se puede deducir como consecuencia de la teoría de las redes cristalinas.
- La **traslación** es la simetría trivial de las redes.
  - Es la distancia más corta entre dos nudos contiguos en cada una de las tres dimensiones del espacio.
- El **centrado** es una operación propia de la red.
  - Resulta de añadir nuevos nudos en el centro de cada paralelogramo generador de la red plana.
  - Sólo se considera posible cuando la red resultante es morfológicamente diferente de la original.
  - Sólo se pueden centrar las redes rectangulares (Figura 3.1) o las rómbicas (Figura 3.2).

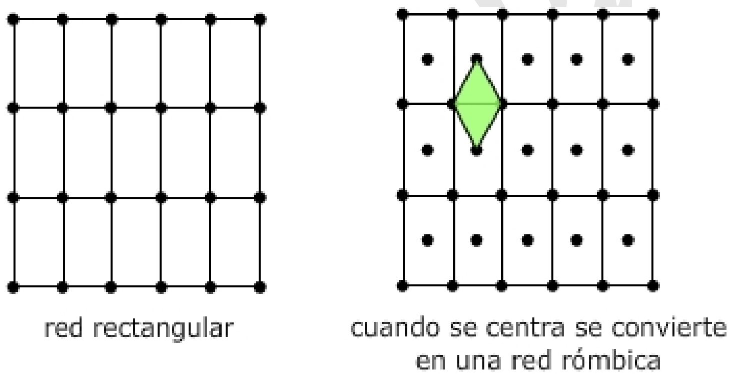


FIGURA 3.1

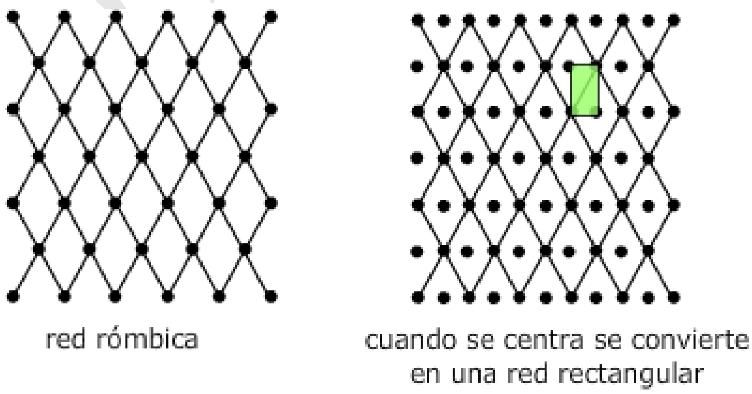


FIGURA 3.2

RELACIONES ENTRE ELEMENTOS DE LA RED Y OPERADORES DE SIMETRÍA

- El número y tipo de operadores que aparecen en una red dependen de la métrica de aquélla.

- El principio de homogeneidad reticular hace que todo elemento de simetría que pasa por un nudo se repita paralela e indefinidamente en cada nudo de la red.
- Todo nudo de la red es un centro de simetría.
- Todo eje de simetría es una fila reticular.
- Todo plano de simetría es un plano reticular.
- Perpendicularmente a todo eje de simetría existe una familia de planos reticulares.
- Todo plano reticular que es plano de simetría tiene una familia de filas reticulares perpendicular a él y cada fila reticular de esta familia es un eje de simetría.
- Toda fila reticular que es un eje de orden par (2, 4 o 6) tiene perpendicularmente a ella un plano reticular que es un plano de simetría.
- Una fila reticular que sea eje de simetría de orden 4 ó 6 tiene 4 ó 6 familias de filas perpendiculares a ella que son ejes binarios y 4 ó 6 familias de planos de simetría que contienen a dicha fila.
- La intersección de un eje de orden par sobre un plano de simetría que es perpendicular a dicho eje, es un centro de simetría.

3.2 CONCEPTO DE SIMETRÍA

- Es una propiedad que hace que los objetos aparezcan indistinguibles después de haberlos sometido a alguna transformación en el espacio.
- Matemáticamente, la simetría corresponde a un conjunto de transformaciones lineales que hacen unas direcciones equivalentes a otras.

> La definición de **equivalencia**, desde el punto de vista matemático incluye las condiciones de la:
> - identidad
>   a = a
> - reflexividad
>   si a = b, entonces b = a
> - transitividad
>   si a = b y b = c, entonces a = c

3.3 OPERACIÓN DE SIMETRÍA

- Es una transformación que cuando se somete a un objeto le lleva a una configuración indistinguible de la original.

OPERACIONES DE SIMETRÍA EN EL PLANO

- Traslación
- Rotación
- Inversión
- Reflexión
- Reflexión-traslación (deslizamiento)

OPERACIONES DE SIMETRÍA EN EL ESPACIO

- Traslación
- Rotación
- Inversión
- Reflexión
- Rotación-inversión
- Rotación-reflexión
- Reflexión-traslación (deslizamiento)
- Rotación-traslación

3.4 ELEMENTO DE SIMETRÍA

- Es un operador que permite realizar la operación de simetría.
- Existen varios tipos de elementos de simetría.

ELEMENTOS DE SIMETRÍA EN EL PLANO

- Vector de traslación
- Punto de rotación
- Centro
- Línea de simetría
- Línea de deslizamiento

ELEMENTOS DE SIMETRÍA EN EL ESPACIO

- Vector de traslación
- Eje de rotación
- Centro
- Plano

- Eje de rotación-inversión
- Eje de rotación-reflexión
- Plano de deslizamiento
- Eje helicoidal

3.5 TRASLACIÓN

- Es la simetría trivial de las redes.
- Es la distancia más corta entre dos nudos contiguos en cada una de las tres dimensiones del espacio.

FIGURA 3.3.- Elemento decorativo de la mezquita de Córdoba

3.6 ROTACIÓN y EJE DE ROTACIÓN

EN EL ESPACIO

- Operación de simetría que consiste en un giro de 360º/*n* alrededor de un eje de simetría ó eje de rotación (que es su correspondiente elemento de simetría).
- El orden de ese eje es ***n***, pudiendo ser **1**, **2**, **3**, **4** y **6**.
- Para simbolizar los ejes de rotación se usan diversas notaciones, aunque las más utilizadas son la de Hermann Mauguin o notación internacional y la de Schoenflies (Tabla 3.1).

Hermann Mauguin	**Schoenflies**	**eje giro**	**grados (º)**
1	C_1	monario(identidad)	360
2	C_2	binario	180
3	C_3	ternario	120
4	C_4	cuaternario	90
6	C_6	senario	60

TABLA 3.1

- En el plano los operadores de la operación rotación son **puntos de rotación** y el orden, *n*, pude ser **1**, **2**, **3**, **4** y **6**.
- A esta operación se la denomina **operación propia** y a los operadores **ejes de rotación propia**.
- Un eje de rotación de orden **n** genera un total de n operaciones.

- Un eje de rotación que implica giros de 360º/n también implica giros de mx(360º/n), donde m puede valer 1, 2, 3, 4, 5 y 6, es decir:

  giros que implica:

360º/1	1x(360º/1)					
360º/2	1x(360º/2)	2x(360º/2)				
360º/3	1x(360º/3)	2x(360º/3)	3x(360º/3)			
360º/4	1x(360º/4)	2x(360º/4)	3x(360º/4)	4x(360º/4)		
360º/6	1x(360º/6)	2x(360º/6)	3x(360º/6)	4x(360º/6)	5x(360º/6)	6x(360º/6)

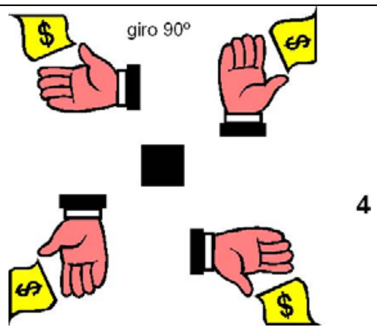
TABLA 3.2

EN EL PLANO

- Operación de simetría que consiste en un giro de 360º/*n* alrededor de un punto de simetría ó punto de rotación (que es su correspondiente elemento de simetría).
- El orden de ese punto es ***n***, pudiendo ser **1**, **2**, **3**, **4** y **6**.
- En la Tabla 3.3 se muestra la notación de Hermann-Mauguin para los puntos de rotación.

Hermann Mauguin	**eje giro**	**grados (º)**
1	monario(identidad)	360
2	binario	180
3	ternario	120
4	cuaternario	90
6	senario	60

TABLA 3.3

Punto de rotación	**Figura**	**Punto de rotación**	**Figura**
monario		cuaternario	

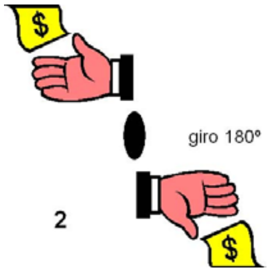
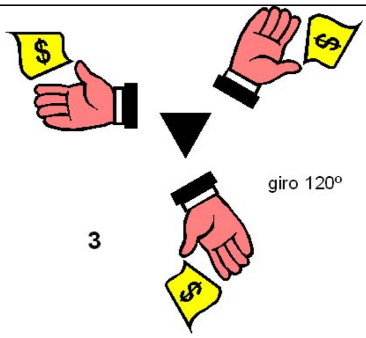
Punto de rotación	**Figura**	**Punto de rotación**	**Figura**
binario		senario	
ternario			

TABLA 3.4.- Puntos de rotación

3.7 INVERSIÓN

- Es la operación que hace que un objeto con coordenadas iniciales ***x***, ***y z*** se transforme en otro con coordenadas ***-x -y -z***.
- El elemento es el **centro** de simetría.
- Equivale a la rotación inversión de orden 1, cuyo símbolo, según la notación de Hermann-Mauguin es: $\bar{1}$. Una imagen estática de la actuación de la inversión puede observarse en la Figura 3.3.

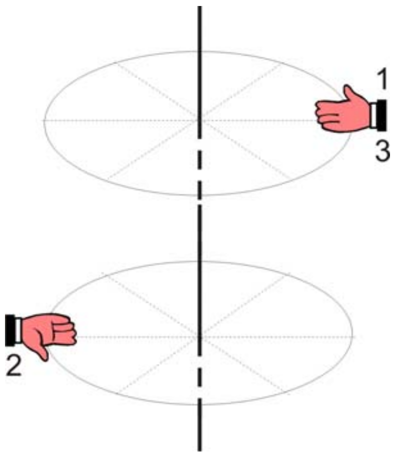


FIGURA 3.4.- Inversión

RESUMEN DE LAS OPERACIONES DE SIMETRÍA

Operación de simetría	**Giros**	**Ejes de rotación**	**Notas**
Rotaciones propias	360º/n	1, 2, 3, 4 y 6	**1** es la **identidad**
Rotaciones impropias	360º/n e inversión simultánea	$\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$ y $\bar{6}$	$\bar{1}$ equivalente a **centro de simetría** $\bar{2}$ equivalente a **plano de simetría** $\bar{3}$ equivalente a **eje ternario + centro de simetría** $\bar{6}$ equivalente a **eje ternario más plano perpendicular**

TABLA 3.5

3.8 REFLEXIÓN y PLANO DE REFLEXIÓN ó de SIMETRÍA EN EL ESPACIO

- La reflexión es la operación de simetría que hace que todo motivo u objeto que aparece a un lado del elemento de simetría, denominado plano de simetría o de reflexión, aparezca al otro lado de dicho plano y a la misma distancia.
- Actuación del plano de reflexión.
- Símbolo del plano de simetría
- notación de Hermann Mauguin es ***m***.
- notación de Schoenflies es ***s***,
    - **s_h** plano horizontal perpendicular al eje de rotación principal (que es el que tiene el mayor orden)
    - **s_n** plano vertical que incluye al eje de rotación
    - **s_d** plano diagonal que incluye al eje de rotación principal y divide en dos al ángulo entre dos ejes C_2 que son normales al eje de rotación principal.

EN EL PLANO

- La reflexión es la operación de simetría que hace que todo motivo u objeto que aparece a un lado del elemento de simetría, denominado línea de simetría o de reflexión, aparezca al otro lado de dicha línea y a la misma distancia.
- Actuación de la línea de simetría o de reflexión.
- Símbolo de la línea de simetría es ***m***

3.9 ROTACIÓN INVERSIÓN y EJES DE ROTACIÓN INVERSIÓN

- Es una operación de simetría que consiste en un giro de 360º/*n* y una inversión alrededor de un elemento de simetría denominado eje de rotación inversión. El orden de ese eje es *n*, pudiendo ser 1, 2, 3, 4 y 6.
- El símbolo de estos ejes para la notación más usada, Hermann-Mauguin o internacional, es el siguiente:

  $\bar{1}$ que se lee uno con raya

  $\bar{2}$ que se lee dos con raya

  $\bar{3}$ que se lee tres con raya

  $\bar{4}$ que se lee cuatro con raya

  $\bar{6}$ que se lee seis con raya

En la Tabla 3.6 puede observarse la notación de Hermann-Mauguin de estos ejes, así como la de Schoenflies, su denominación y el número de grados de giro de los mismos

Hermann Mauguin	**Schoenflies**	**eje giro**	**grados (º)**
$\bar{1}$	C_1	monario(identidad)	360
$\bar{2}$	C_2	binario	180
$\bar{3}$	C_3	ternario	120
$\bar{4}$	C_4	cuaternario	90
$\bar{6}$	C_6	senario	60

TABLA 3.6.- Tabla resumen

Nota: debido a las dificultades de utilizar los símbolos anteriores con lenguaje html que es el usado normalmente en internet se utilizan normalmente otros que los sustituyen: -1, -2, -3, -4, -6

- La equivalencia con la rotación reflexión, que no existe en la notación de Hermann-Mauguin, es la que se muestra en la Tabla 3.7

Rotación-inversión Hermann-Mauguin	**Rotación-reflexión Schoenflies**
$\bar{1}$	S_2
$\bar{2}$	σ
$\bar{3}$	S_6
$\bar{4}$	S_4
$\bar{6}$	S_3

TABLA 3.7

- El eje $\bar{1}$ es el centro de simetría
- El eje $\bar{2}$ equivale al plano de simetría, *m*

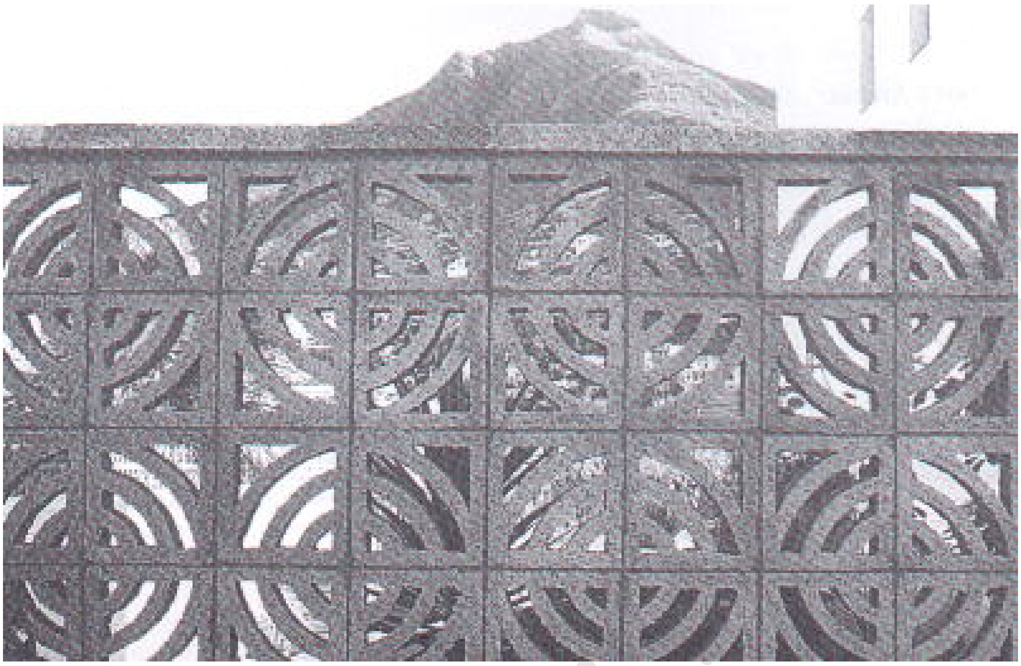
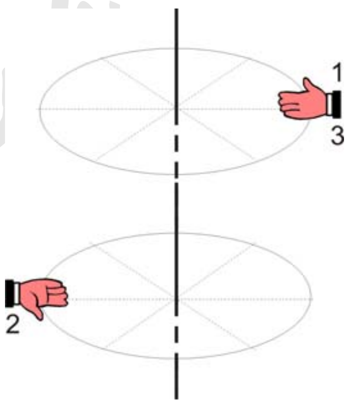
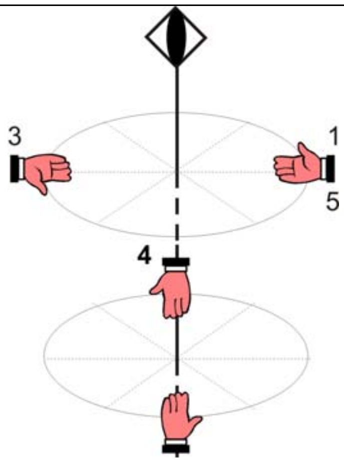


FIGURA 3.5.- Planos de simetría verticales y horizontales

- El eje $\bar{3}$ equivale al eje 3 y al centro de simetría
- El eje $\bar{6}$ equivale al eje 3 y a un plano m perpendicular a él (3/m).

Ejes de rotación-inversión	**Figura**	**Ejes de rotación-inversión**	**Figura**
Monario $\bar{1}$		Cuaternario (-4)	

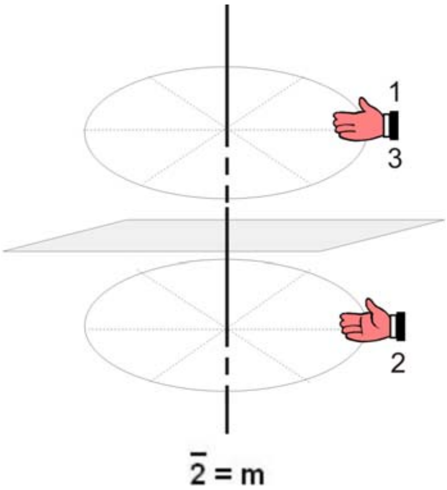
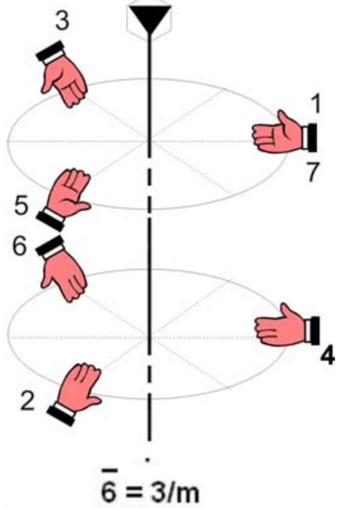
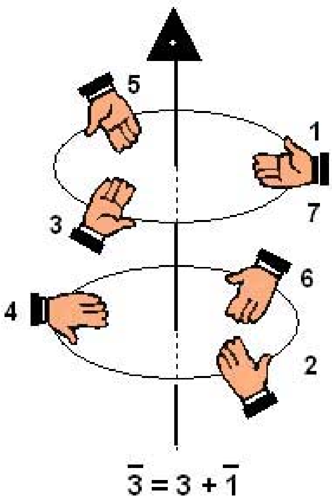
Ejes de rotación-inversión	Figura	Ejes de rotación-inversión	Figura
Binario $\bar{2}$		Senario (-6)	
Ternario $\bar{3}$			

TABLA 3.8.- Ejes de rotación-inversión

3.10 ROTACIÓN REFLEXIÓN y EJES DE ROTACIÓN REFLEXIÓN

- Consiste en giros de 360º/n y reflexión
  n es el orden de giro y su valor puede ser 1, 2, 3, 4 y 6.
- Ejes de rotación reflexión son los elementos de simetría que permiten realizar esta operación.
- Su símbolo, según la notación de Schoenflies es, S_2, σ, S_6, S_4, S_3
- No se utiliza en la notación de Hermann Mauguin, pués se usa la rotación inversión y los ejes de rotación inversión.

- Existe equivalencia entre ambas notaciones, como se muestra en la Tabla 3.9.

Rotación-inversión Hermann-Mauguin	**Rotación-reflexión Schoenflies**
$\bar{1}$	S_2
$\bar{2}$	σ
$\bar{3}$	S_6
$\bar{4}$	S_4
$\bar{6}$	S_3

TABLA 3.9

3.11 REFLEXIÓN-TRASLACIÓN (DESLIZAMIENTO) EN EL ESPACIO

- El deslizamiento es una operación de simetría que consiste en una reflexión y una traslación.
- El operador de simetría es el plano de deslizamiento.
- La traslación tiene que estar contenida en el plano de deslizamiento.
- La distancia de la traslación tiene que ser la mitad de la traslación unidad en dicha dirección (Figura 3.6).

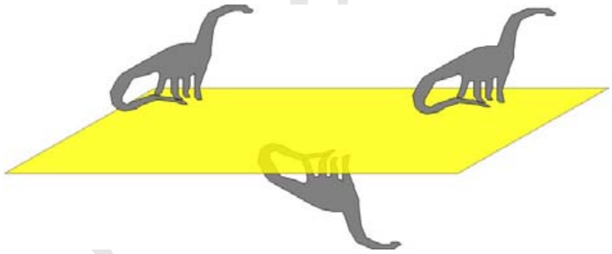


FIGURA 3.6.- Plano de deslizamiento

- En la notación de Hermann-Mauguin se distinguen los siguientes planos de deslizamiento:

  axial

  diagonal

  diamante

Nota: Las figuras reflejan proyecciones, por lo que el plano de deslizamiento se observa como una línea, que es lo que se observa cuando se proyecta sobre el plano coloreado en amarillo.

EN EL PLANO

- El deslizamiento es una operación de simetría que consiste en una reflexión y una traslación.
- El operador de simetría es la línea de deslizamiento.
- La traslación tiene que estar contenida en la línea de deslizamiento.
- La distancia de la traslación tiene que ser la mitad de la traslación unidad en dicha dirección.
  - axial
  - diagonal
  - diamante

PLANO DE DESLIZAMIENTO AXIAL

EN EL ESPACIO

- Plano cuya componente de deslizamiento es paralela a un eje cristalográfico.
- Su longitud es la mitad del periodo de la traslación a lo largo de este eje.
- Se simboliza como ***a***, ***b*** o ***c***, según que el deslizamiento sea a lo largo de los ejes cristalográficos ***a***, ***b*** o ***c***, respectivamente.

En las Figuras 3.8 a 3.10 se muestra el efecto del plano de deslizamiento axial según sea de un tipo u otro y en relación a distintos planos cristalinos de una celda rómbica (Figura 3.7).

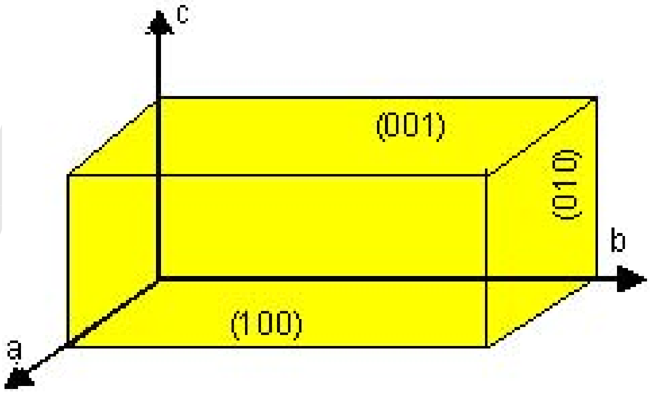


FIGURA 3.7.- Planos cristalinos de una celda rómbica

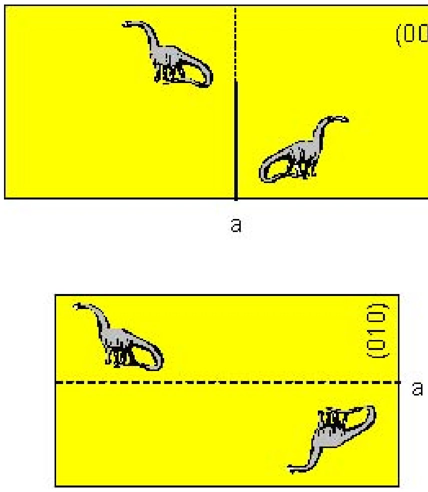


FIGURA 3.8.- Plano axial **a** perpendicular a plano cristalino (001) y (010) respectivamente de una celda rómbica

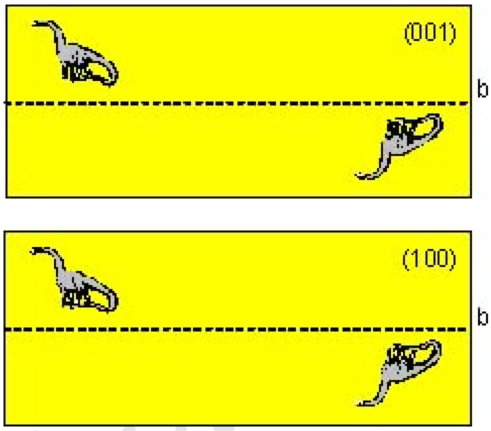


FIGURA 3.9.- Plano axial **b** perpendicular a plano cristalino (001) y (100) respectivamente de una celda rómbica

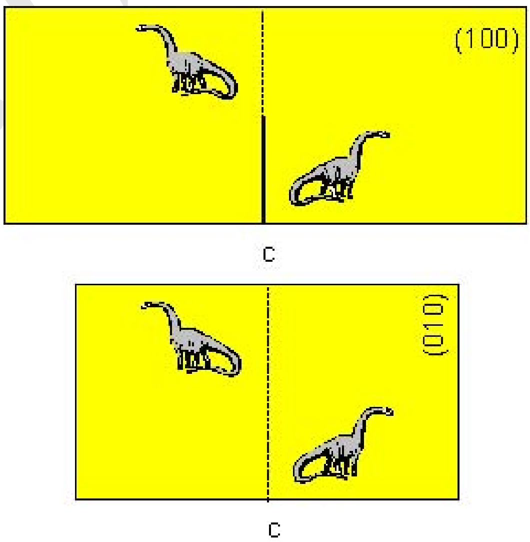


FIGURA 3.10.- Plano axial **c** perpendicular a plano cristalino (100) y (010) respectivamente de una celda rómbica

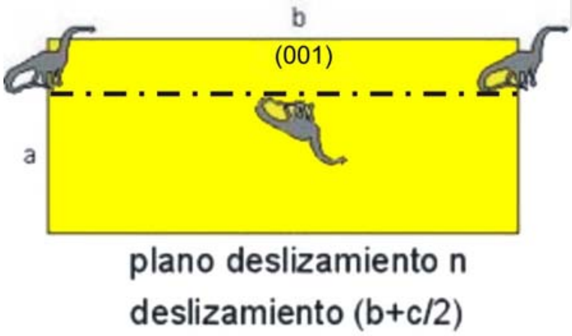
EN EL PLANO

- Línea cuya componente de deslizamiento es paralela a uno de los dos ejes cristalográficos.
- Su longitud es la mitad del periodo de la traslación a lo largo de este eje.
- Se simboliza como ***g***.

Actuación de la línea de deslizamiento

PLANO DE DESLIZAMIENTO DIAGONAL

- Plano cuya componente de deslizamiento es:
  (a+b)/2
  (a+c)/2
  (b+c)/2
- Su símbolo es ***n***.



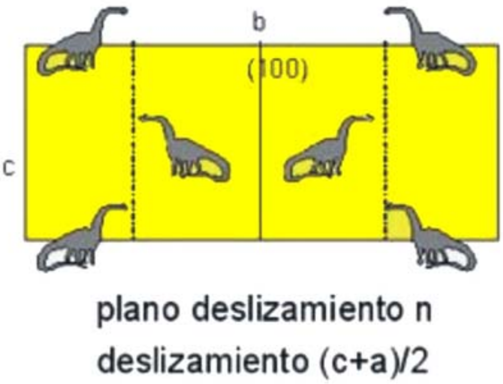


FIGURA 3.11.- Plano de deslizamiento diagonal perpendicular a plano cristalino (001) y (100), respectivamente de celda rómbica

3.12 ROTACIÓN-TRASLACIÓN

- Operación que implica rotación de orden 2, 3, 4 o 6 y traslación constante a lo largo del eje de rotación.

- La rotación se toma en el sentido contrario a las agujas del reloj y la traslación en sentido ascendente.
- El operador que permite realizar la operación es el eje helicoidal.
- El número de ejes helicoidales existentes es *n*-1, siendo *n* el orden del eje.

  Así, los ejes helicoidales existentes son los que se muestran en la Tabla 3.10.

Orden del eje	**Ejes helicoidales**
2	2_1
3	3_1 3_2
4	4_1 4_2 4_3
6	6_1 6_2 6_3 6_4 6_5

TABLA 3.10

- Ejes helicoidales enantiomorfos (cada uno es la imagen especular del otro)

  3_1 y 3_2

  4_1 y 4_3

  6_1 y 6_5

  6_2 y 6_4

En la Tabla 3.11 se muestra el símbolo de los diferentes ejes helicoidales en la notación de Hermann-Mauguin, los grados de giro y la traslación que implican

Tipo de eje helicoidal	**Símbolo**	**Rotación (º)**	**Traslación**
Binario	2_1	+ 180	1/2[uvw]
Ternario	3_1 3_2	+ 120	1/3[uvw] 2/3[uvw]
Cuaternario	4_1 4_2 4_3	+ 90	1/4[uvw] 3/4[uvw] 1/2[uvw]
Senario	6_1 6_2 6_3 6_4 6_5	+ 60	1/6[uvw] 5/6[uvw] 1/3[uvw] 2/3[uvw] 1/2[uvw]

TABLA 3.11

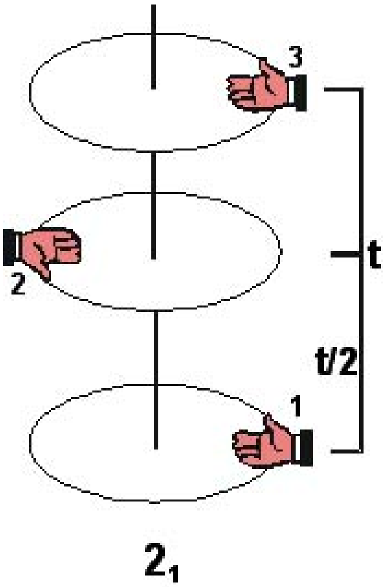
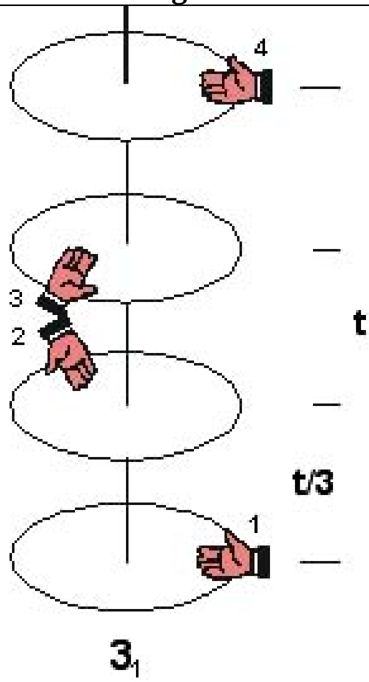
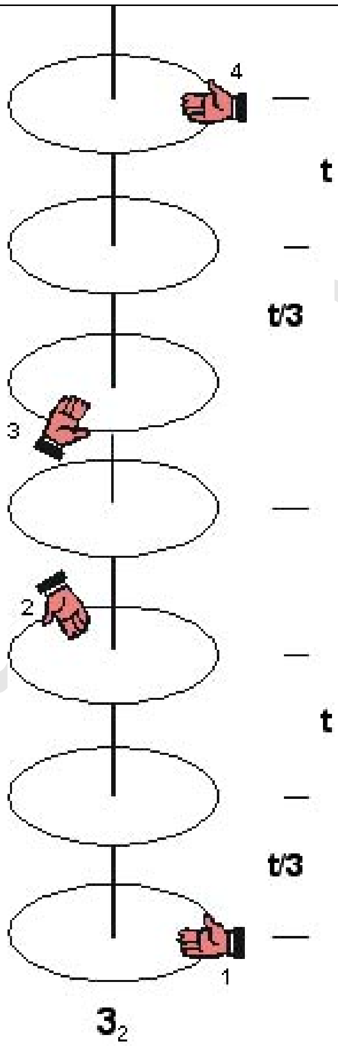
Ejes	Figura	Ejes	Figura
Binario 2_1		Ternario 3_1	
Ternario 3_2			

TABLA 3.12.- Ejes helicoidales.