

CAPÍTULO X:

PIEZAS A TORSIÓN

10.1. INTRODUCCIÓN

Una sección de una pieza trabaja a torsión cuando sobre ella actúa un momento torsor interno T_E . Cuando el momento torsor es el único esfuerzo sobre la sección decimos que se encuentra sometida a torsión pura. Si por el contrario actúan simultáneamente sobre la sección otros esfuerzos (momentos flectores, esfuerzos cortantes ó esfuerzos axiales), la sección estará sometida a torsión compuesta. Mediante el principio de superposición la torsión compuesta podrá descomponerse en una torsión pura más una flexión más un esfuerzo axial dependiendo de las situaciones.

La torsión pura puede ser de tres tipos dependiendo de la forma de la sección transversal y del tipo de vinculación que presente la pieza:

Torsión uniforme o torsión de Saint Venant. Situación que genera solamente tensiones tangenciales y que se presenta generalmente en piezas de sección cerrada en las que no se impide el alabeo de las secciones extremas de la pieza. Se deberá cumplir:

$$T_{Ed} = T_{t,Ed} \leq T_{c,Rd}$$

Torsión de alabeo. Esfuerzo que además de las tensiones tangenciales genera tensiones normales generalmente de mayor magnitud. Esta presente en secciones abiertas (perfiles laminados o conformados abiertos) o situaciones en las que se impide el libre alabeo de las secciones extremas de la pieza. Se verificará la condición:

$$T_{Ed} = T_{w,Ed} \leq T_{c,Rd}$$

Torsión mixta. Situación que combina las dos anteriores. El valor de cálculo del esfuerzo torsor T_{Ed} en la sección transversal que estemos analizando puede dividirse en dos componentes tal que se cumpla la condición de agotamiento resistente dada por:

$$T_{Ed} = T_{t,Ed} + T_{w,Ed} \leq T_{c,Rd}$$

donde

$T_{t,Ed}$ es la componente del esfuerzo torsor correspondiente a la torsión uniforme

$T_{w,Ed}$ es la componente del esfuerzo torsor correspondiente a la torsión de alabeo

$T_{c,Rd}$ es la resistencia de cálculo de la sección a torsión.

Los valores de $T_{t,Ed}$ y $T_{w,Ed}$ pueden ser determinados a partir de T_{Ed} mediante un análisis elástico, teniendo en cuenta las características de la sección transversal, las condiciones de vinculación en los apoyos y la distribución de las acciones a lo largo de la pieza.

Deberán considerarse los siguientes estados tensionales inducidos por la torsión:

*Las tensiones tangenciales $\tau_{t,Ed}$ debidas al esfuerzo torsor $T_{t,Ed}$ de torsión uniforme.

*Las tensiones normales longitudinales $\sigma_{w,Ed}$ debidas al bimomento B_{Ed} de torsión de alabeo y las tangenciales $\tau_{w,Ed}$ debidas al esfuerzo torsor $T_{w,Ed}$ de torsión de alabeo.

Para el dimensionamiento y comprobación frente al agotamiento de la resistencia de la sección, de acuerdo con criterios elásticos, puede aplicarse el criterio:

$$\left(\frac{\sigma_{x,Ed}}{f_y / \gamma_{M0}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{z,Ed}}{f_y / \gamma_{M0}} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_{x,Ed}}{f_y / \gamma_{M0}} \right) \cdot \left(\frac{\sigma_{z,Ed}}{f_y / \gamma_{M0}} \right) + 3 \cdot \left(\frac{\tau_{Ed}}{f_y / \gamma_{M0}} \right)^2 \leq 1$$

10.2. TORSIÓN UNIFORME

Una pieza prismática de directriz recta cuyos extremos pueden alabeo libremente está sometida a torsión uniforme cuando está solicitada en sus extremos por dos momentos torsores iguales y opuestos. En este caso, el momento torsor es constante a lo largo de la pieza y produce el mismo alabeo en todas las secciones.

En estas condiciones solo se producen tensiones tangenciales $\tau_{t,Ed}$ debidas al esfuerzo torsor uniforme $T_{t,Ed}$ tal que:

$$\tau_{t,Ed} = \frac{T_{t,Ed}}{W_t}$$

En esta situación, el ángulo girado por unidad de longitud θ_t es constante y de valor:

$$\theta_t = \frac{T_{t,Ed}}{G \cdot I_T}$$

siendo:

W_t el módulo resistente a la torsión

θ_t el ángulo girado por unidad de longitud

G el módulo de elasticidad transversal

I_T el módulo de torsión

El Código Técnico de Edificación CTE admite que en las piezas de sección hueca cerrada delgada se desprecie la componente de torsión de alabeo. Análogamente, admite que en las piezas formadas por un perfil en doble T (IPE, HEB, etc) pueda despreciarse la componente de torsión uniforme.

A continuación se presentan unas tablas que permiten llevar a cabo el análisis de piezas solicitadas por torsión uniforme. La tabla 1 permite obtener la tensión tangencial máxima y el giro de la sección en el caso de una sección rectangular maciza.

<p>Pieza de sección rectangular</p>	$\tau_{t,Ed} = \frac{T_{t,Ed}}{W_t}$ $\theta_t = \frac{T_{t,Ed}}{G \cdot I_T}$ $I_t = \beta \cdot b \cdot e^3$ $W_t = \mu \cdot b \cdot e^2$ <p>La $\tau_{m\acute{a}x}$ se presenta en el centro del lado mayor.</p> <p>En el centro del lado menor la τ_e tiene el valor</p> $\tau_e = \tau_{t,Ed \max} \frac{e}{b}$	β, μ coeficientes b lado mayor e lado menor		
		m=b/e	μ	β
		1.0	0.208	0.141
		1.5	0.238	0.196
		2.0	0.256	0.229
		2.5	0.269	0.249
		3.0	0.278	0.263
		4.0	0.290	0.281
		5.0	0.298	0.291
		6.0	0.303	0.299
		7.0	0.307	0.303
		8.0	0.310	0.307
		9.0	0.312	0.310
10.0	0.314	0.313		
>10.0	0.333	0.333		

Tabla 1. Torsión uniforme en secciones rectangulares macizas

La tabla 2 permite obtener la tensión tangencial máxima en cada uno de los rectángulos en los que se descompone una sección abierta sometida a torsión uniforme.

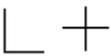
Pieza de sección abierta formada por varios rectángulos	$I_T = \beta b_i e_i^3$ $I_T = \alpha \sum_{i=1}^n I_{Ti}$ $W_{Ti} = \frac{I_T}{e_i}$ $\tau_{t,Edmáx,i} = \frac{T_{t,Ed}}{W_t}$	Se supone descompuesta la sección por n rectángulos. α coeficiente de forma de la sección.	
		α	Sección
		1.0	
		1.1	
		1.3	(en doble T)
		$\tau_{máx}$ en el centro del lado mayor del rectángulo de mayor espesor.	

Tabla 2. Torsión uniforme en secciones formadas por varios rectángulos

La tabla 3 es para piezas huecas de sección rectangular de débil espesor variable o no.

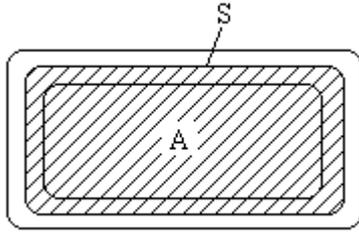
Pieza de sección cerrada con pared de débil espesor 	Espesor variable $I_T = \frac{4A^2}{\int \frac{ds}{e}}$ $W_T = 2eA$ $\tau_{t,Ed} = \frac{T_{t,Ed}}{W_t} = \frac{T_{t,Ed}}{2eA}$	$\tau_{máx}$ en el punto en que el espesor es menor. A área encerrada por línea media de la sección.
	Espesor constante $I_T = \frac{4A^2 e}{S}$ $W_T = 2eA$ $\tau_{t,Ed} = \frac{T_{t,Ed}}{W_t} = \frac{T_{t,Ed}}{2eA}$	τ constante S perímetro de línea media

Tabla 3. Torsión uniforme en secciones huecas rectangulares de débil espesor

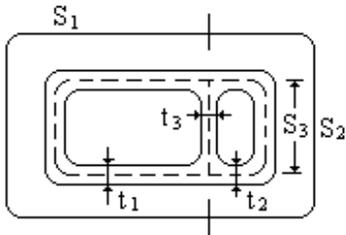
<p>Pieza de sección cerrada con tabique intermedio</p> 	$\tau_1^* = \frac{M_T^*}{2} \frac{A_1 t_3 S_2 + A_2 t_2 S_3}{A_1^2 t_1 t_3 S_2 + A_1^2 t_1 t_2 S_3 + A_2^2 t_2 t_3 S_1}$ $\tau_2^* = \frac{M_T^*}{2} \frac{A_2 t_3 S_1 + A_1 t_1 S_3}{A_1^2 t_1 t_3 S_2 + A_1^2 t_1 t_2 S_3 + A_2^2 t_2 t_3 S_1}$ $\tau_3^* = \frac{M_T^*}{2} \frac{A_1 t_1 S_2 - A_2 t_2 S_1}{A_1^2 t_1 t_3 S_2 + A_1^2 t_1 t_2 S_3 + A_2^2 t_2 t_3 S_1}$	<p>$A_1, A_2 =$ áreas encerradas por líneas medias del primero y segundo cajón, respectivamente</p> <p>$A = A_1 + A_2$</p>
--	--	--

Tabla 4. Torsión uniforme en secciones huecas rectangulares con tabique intermedio

Las tablas 5 y 6 se refieren respectivamente a las piezas circulares macizas y huecas.

<p>Pieza de sección circular maciza de radio R</p>	$I_T = \frac{\pi R^4}{2}$ $W_T = \frac{\pi R^3}{2}$ $\tau_{t,Ed \max} = \frac{T_{t,Ed}}{W_t} = \frac{2T_{t,Ed}}{\pi \cdot R^3}$ $\tau_{t,Ed} = \tau_{t,Ed \max} \cdot \frac{r}{R}$	<p>τ_{\max} presente en la circunferencia exterior $0 < r < R$.</p>
---	--	--

Tabla 5. Torsión uniforme en secciones circulares macizas

<p>Pieza de sección corona circular</p>	$I_T = \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4)$ $W_T = \frac{\pi}{2r} (R_2^4 - R_1^4)$ $\tau_{t,Ed \max} = \frac{T_{t,Ed}}{W_t} = \frac{2 \cdot T_{t,Ed} \cdot R_2}{\pi \cdot (R_2^4 - R_1^4)}$ $\tau_{t,Ed} = \tau_{t,Ed \max} \frac{r}{R_2} = \frac{2 \cdot T_{t,Ed} \cdot r}{\pi \cdot (R_2^4 - R_1^4)}$	<p>R_1 radio interior R_2 radio exterior $R_1 < r < R_2$</p> <p>τ_{\max} presente en la circunferencia exterior</p>
---	---	--

Tabla 6. Torsión uniforme en secciones circulares huecas

10.3. TORSIÓN DE ALABEO

10.3.1 ANALOGÍA CON LA FLEXIÓN SIMPLE

Para analizar la torsión de alabeo conviene tener en cuenta la similitud que ésta presenta con la flexión simple. Así en la flexión simple la ley de Navier relaciona el estado de tensiones normales en la sección $\sigma_{x,Ed}$ a partir del momento flector M_f , la distancia z al eje de flexión y el momento de inercia respecto de dicho eje de flexión I_y . Mediante una ley similar se pueden determinar las tensiones normales longitudinales $\sigma_{w,Ed}$ originadas por la torsión de alabeo a partir del bimomento B_{Ed} , la coordenada sectorial normalizada ω y el módulo de alabeo de la sección transversal I_A . Ver tabla 7.

Flexión simple	Torsión de alabeo
$\sigma_{x,Ed} = \frac{M_f \cdot z}{I_y}$	$\sigma_{w,Ed} = \frac{B_{Ed} \cdot \omega}{I_A}$
$\tau_{Ed} = \frac{V_{Edz} \cdot S_y}{I_y \cdot t}$	$\tau_{w,Ed} = \frac{T_{w,Ed} \cdot S_w}{I_A \cdot t}$
Apoyo articulado	Apoyo en horquilla (libre alabeo)
Extremo empotrado	Restricción al alabeo en el extremo
Carga puntual P	Momento torsor puntual T
Carga repartida q	Momento torsor repartido t

Tabla 7. Similitudes entre la flexión simple y la torsión de alabeo

Asimismo hay una similitud entre la tensión tangencial τ_{Ed} debida al cortante V_{Ed} en una situación de flexión simple y la tensión tangencial $\tau_{w,Ed}$ originada por el momento torsor de alabeo $T_{w,Ed}$ que solicita la sección (Tabla 7).

donde:

S_y es el momento estático respecto del eje de flexión y - y del área de la sección transversal por encima del punto considerado.

I_y es el momento de inercia de la sección con respecto del eje de flexión y - y

t es el espesor de la sección en el punto considerado.

S_w es el momento estático sectorial

B_{Ed} es el bimomento (momento del momento torsor en $N \cdot m^2$) integral del producto del momento torsor $T_{w,Ed}$ por un diferencial de longitud de la pieza dx

$$B_{Ed} = \int_0^x T_{w,Ed} \cdot dx$$

Para la determinación del bimomento B_{Ed} y del momento torsor de alabeo $T_{w,Ed}$ se analizará la pieza considerando los momentos torsores exteriores concentrados T o repartidos t como si fueran cargas concentradas P o repartidas q del mismo valor numérico actuando sobre la pieza. A partir de estas cargas ficticias se obtienen las leyes de momentos flectores y de esfuerzos cortantes que se corresponderán en signo y valor numérico con las leyes de bimomentos y momentos torsores de alabeo en cada sección. Un apoyo que impida los giros pero no los alabeos, se considerará como un apoyo articulado, si además impide los alabeos, se considerará como un empotramiento.

10.3.2 SIMPLIFICACIONES EN TORSIÓN NO UNIFORME

Aquellas piezas sometidas a torsión no uniforme cuyo módulo de alabeo I_A sea nulo o pequeño respecto del módulo de torsión I_T se pueden calcular como si estuvieran sometidas a torsión uniforme. Algunos ejemplos de este tipo serían:

- Secciones llenas como redondos, cuadrados, etc
- Secciones en corona circular de pequeño espesor como tubos.
- Secciones en cajón tales que el cociente de sus dos dimensiones no exceda de cuatro. ($h/b < 4$ y $b/h < 4$)

El ángulo de giro relativo entre dos secciones A y B se obtiene en estos casos de:

$$\theta_{AB} = \frac{1}{G \cdot I_T} \int_A^B M_T \cdot d_z$$

10.3.3 MÉTODO APROXIMADO DE TIMOSHENKO PARA LA TORSIÓN DE ALABEO EN PIEZAS CON SECCIÓN EN I

La instrucción EAE propone que en el caso de piezas con sección en doble T simétrica el cálculo de las distribuciones de tensiones normales y tangenciales ocasionadas por el alabeo, pueda realizarse de acuerdo con el método simplificado de Timoshenko.

Para este tipo de secciones la coordenada sectorial normalizada $\omega = y \cdot z$, siendo y, z los ejes principales de inercia de la sección. Como ya se indicó, la distribución de tensiones longitudinales debidas al alabeo $\sigma_{w,Ed}$ es directamente proporcional al valor de la coordenada sectorial normalizada ω . Por lo tanto, el alma de tales secciones en I apenas se encuentra sometida a tensiones normales longitudinales y las tensiones normales que se inducen en las alas presentan una distribución lineal (ver figura 1).

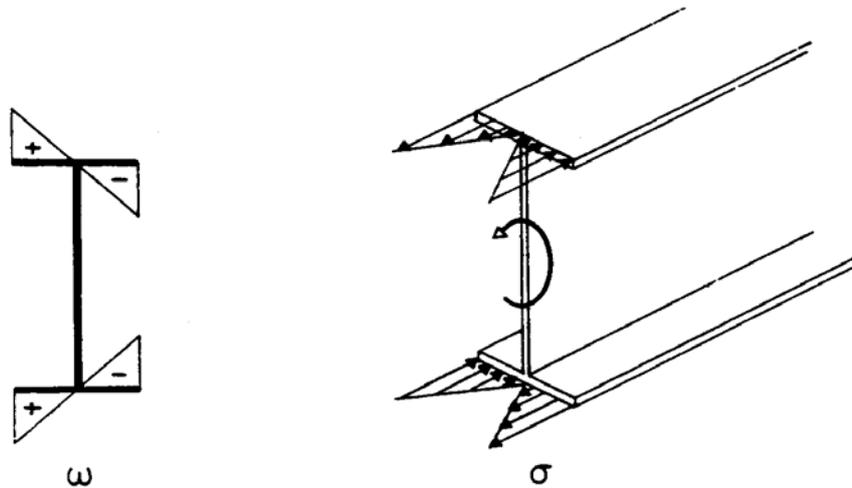


Figura 1. Distribución de coordenadas sectoriales ω y tensiones $\sigma_{w,Ed}$ en perfil I

Puede asimilarse dicha distribución de tensiones a la que ocasionarían dos momentos flectores contenidos en los planos de las alas, de igual magnitud en ambas alas, y con signo opuesto (versor contrario). Estos momentos flectores estarían inducidos a su vez por acciones contenidas en los respectivos planos de las alas de la viga; en concreto por pares de fuerzas iguales F_1, F_2 y actuando en sentidos contrarios para reproducir así la distribución de tensiones longitudinales que induciría el alabeo en un elemento con sección en doble T. El brazo de estos pares de fuerzas es igual a la distancia entre los centros de gravedad de las alas. Estos pares son precisamente los momentos torsores exteriores que actúan sobre la pieza (ver figura 2)

Por tanto, si se está ante una pieza con sección transversal en I, sometida a la acción de momentos torsores, y la torsión que se genera es torsión de alabeo, en vez de recurrir a la solución del problema resolviendo la ecuación diferencial de la torsión de alabeo, se puede proceder de manera aproximada siguiente:

1º) Los momentos torsores puntuales $T_{w,Ed}$ o repartidos $t_{w,Ed}$ se sustituyen por pares de fuerzas puntuales o repartidas de valor

$$F = T_{w,Ed} / d \quad \text{ó} \quad f = t_{w,Ed} / d$$

siendo d la distancia entre los centros de gravedad de las alas de la sección.

2º) Estas fuerzas dan lugar en cada ala las correspondientes leyes de esfuerzos cortantes y momentos flectores.

3º) A partir de las leyes de esfuerzos se determinan las distribuciones de tensiones longitudinales y tangenciales en las alas (sección rectangular a flexión simple) que son las inducidas por el alabeo en elementos estructurales con secciones en I.

La figura 2 permite entender todos los pasos necesarios para abordar el problema de la torsión de alabeo en elementos estructurales con sección transversal en I doblemente simétrica mediante el método aproximado de Timoshenko.

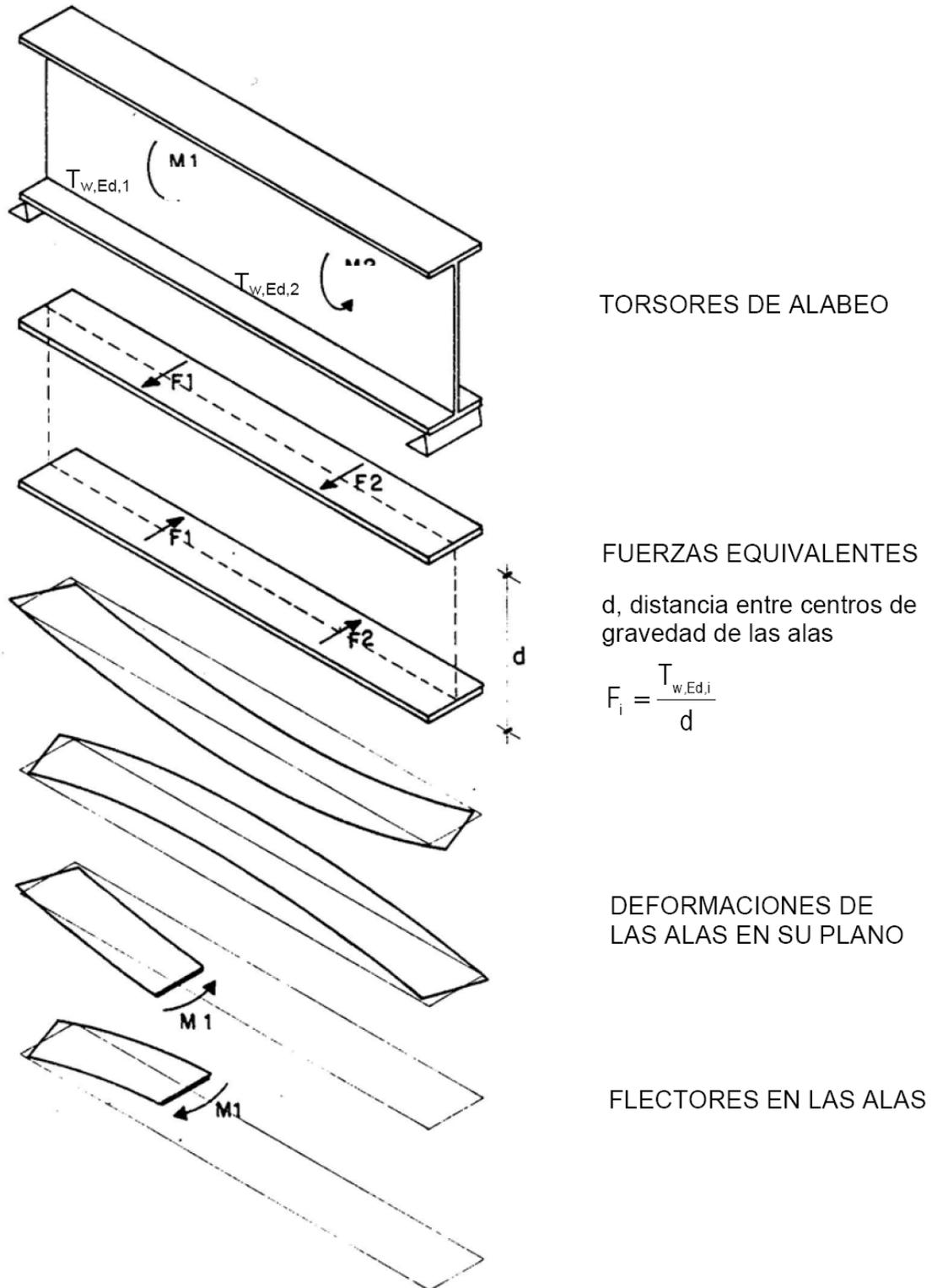


Figura 2. Método aproximado de Timoshenko para secciones en I

10.3.4 EL MÉTODO DE TIMOSHENKO EN LA TORSIÓN MIXTA DE PIEZAS CON SECCIÓN EN I

El método de Timoshenko también puede ser utilizado para realizar la descomposición de los efectos de la torsión mixta en torsión uniforme y torsión de alabeo. Para ello el momento torsor de cálculo T_{Ed} se descompone en suma de la componente de torsión uniforme $T_{t,Ed}$ que solo genera tensiones tangenciales y de la torsión de alabeo $T_{w,Ed}$.

$$T_{Ed} = T_{t,Ed} + T_{w,Ed}$$

Para obtener la fracción que se lleva cada parte se igualan el giro a torsión uniforme y el giro a torsión de alabeo, en la sección transversal del elemento sometida a máximo giro relativo a torsión. De dicha igualdad se obtiene el valor de α que permite descomponer la torsión mixta de modo que

$$T_{t,Ed} = \alpha \cdot T_{Ed} \quad T_{w,Ed} = (1-\alpha) \cdot T_{Ed}.$$

$$\alpha = \frac{\varphi_{\max.2}}{\varphi_{\max.1} + \varphi_{\max.2}} \begin{cases} \varphi_{\max.1} = \frac{1}{G \cdot I_T} \int_A^B T_{Ed} \cdot dx \\ \varphi_{\max.2} = \frac{2 \cdot f_{\max}}{d}; \quad f_{\max} = f(F = \frac{T_{Ed}}{d}) \end{cases}$$

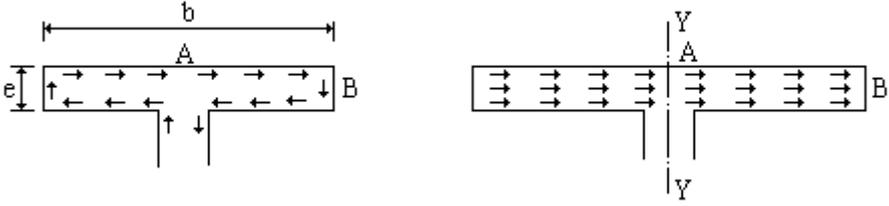
A, B secciones de la pieza entre las que el giro relativo es máximo

f_{\max} flecha máxima de un ala sometida a la fuerza horizontal F

Conocidos los torsores $T_{t,Ed}$ y $T_{w,Ed}$ se determinan las correspondientes tensiones tangenciales y normales pudiendo conocer de este modo el estado tensional. Con el método aproximado de Timoshenko se determina la fuerza transversal en el ala debida al alabeo sin más que dividir el momento torsor de alabeo por el brazo d .

$$F_1 = \frac{T_{w,Ed}}{d}$$

Una vez calculada la fuerza se obtiene el momento flector y el cortante que dicha fuerza genera sobre el ala y las correspondientes tensiones normales y tangenciales. La tabla 8 da las tensiones tangenciales y normales resultantes en el ala del perfil.



-	Debidas a la torsión	Debidas a la flexión
Punto A	$\sigma_x = 0$ $\tau_{yx} = \frac{T_{t,Ed}}{I_T} \cdot e$ $\tau_{zx} = 0$	$\sigma_x = 0$ $\tau_{yx} = \frac{3}{2} \frac{F}{b \cdot e}$ $\tau_{zx} = 0$
Punto B	$\sigma_x = 0$ $\tau_{yx} = 0$ $\tau_{zx} = \frac{3}{4} \frac{T_{t,Ed}}{I_T} \cdot e$	$\sigma_x = \frac{M_f}{W_z/2}$ $\tau_{yx} = 0$ $\tau_{zx} = 0$

Tabla 8. Tensiones en las alas de un perfil sometido a torsión mixta

10.4. ESFUERZO COMBINADO DE TORSIÓN Y FLEXIÓN

10.4.1 MOMENTO FLECTOR+MOMENTO TORSOR

La instrucción EAE propone que para determinar la resistencia de cálculo de una sección transversal sometida a flexión y torsión, sólo se tengan en cuenta los efectos de la torsión producidos por el bimomento B_{Ed} que resultan de un análisis elástico. Esto se traduce en el siguiente criterio de comprobación:

$$M_{c,T,Rd} = \left[1 - \frac{\sigma_{w,Ed}}{f_y / \gamma_{M0}} \right] \cdot M_{c,Rd}$$

donde $M_{c,T,Rd}$ es el momento flector resistente de la sección sometida al esfuerzo combinado de flexión y torsión, $M_{c,Rd}$ es la resistencia de cálculo de la sección a flexión y $\sigma_{w,Ed}$ es la tensión normal longitudinal debida a la torsión de alabeo.

10.4.2 ESFUERZO CORTANTE+MOMENTO TORSOR

Bajo la acción combinada de esfuerzo cortante y momento torsor, en dimensionamiento plástico, deberá aplicarse el siguiente criterio:

$$V_{Ed} \leq V_{pl,T,Rd}$$

donde

V_{Ed} es el valor de cálculo del esfuerzo cortante

$V_{pl,T,Rd}$ es la resistencia de cálculo de la sección frente a un esfuerzo combinado de cortante y momento torsor.

Según el tipo de sección transversal, la resistencia seccional $V_{pl,T,Rd}$ viene dada por:

*Secciones en I o en H:

$$V_{pl,T,Rd} = \sqrt{1 - \frac{\tau_{t,Ed}}{1,25 \cdot (f_y / \sqrt{3}) / \gamma_{M0}}} \cdot V_{pl,Rd}$$

*Secciones en U:

$$V_{pl,T,Rd} = \left[\sqrt{1 - \frac{\tau_{t,Ed}}{1,25 \cdot (f_y / \sqrt{3}) / \gamma_{M0}} - \frac{\tau_{w,Ed}}{(f_y / \sqrt{3}) / \gamma_{M0}}} \right] \cdot V_{pl,Rd}$$

*Secciones huecas:

$$V_{pl,T,Rd} = \left[1 - \frac{\tau_{t,Ed}}{(f_y / \sqrt{3}) / \gamma_{M0}} \right] \cdot V_{pl,Rd}$$

siendo

$\tau_{t,Ed}$ tensión tangencial debida a la torsión uniforme

$\tau_{w,Ed}$ tensión tangencial debida a la torsión de alabeo

$V_{pl,Rd}$ resistencia plástica a cortante de la sección

10.5 EJEMPLOS DE CÁLCULO